RADICALI IN R^+_0

Se *n* è un numero naturale e *a* un numero reale maggiore o eguale a zero, si dice **radice n-esima** di *a* quel numero reale maggiore, o uguale a zero, la cui potenza *n*-esima è eguale ad *a*:

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a \qquad a \geq 0,\, b \geq 0,\, n \in N_0$$

La radice *n*-esima di un numero positivo è sempre, sia per *n* dispari sia per *n* pari, un numero positivo.

Il simbolo $\sqrt[n]{a}$ si chiama **radicale** (n-esimo), il numero *a* si chiama **radicando** e il numero *n* è detto **indice** del radicale

Nel proseguimento dell'argomento si tenga presente la seguente definizione:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \qquad a > 0,\; m \in N,\, n \in N_0$$

Nel seguito sono considerati: $a \geq 0$, $n, m, p, q \in N_0$

	Operazione elementare	**DIMOSTRAZIONE**	**ESEMPIO**
PRIMA PROPRIETÀ FONDAMENTALE $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$	Frazione apparente	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a$	$\left(\sqrt[5]{2}\right)^5 = \left(2^{\frac{1}{5}}\right)^5 = 2^{\frac{5}{5}} = 2$
SECONDA PROPRIETÀ FONDAMENTALE $\sqrt[n]{a^n} = a$	Frazione apparente	$\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a$	$\left(\sqrt[5]{2^5}\right) = 2^{\frac{5}{5}} = 2$
PROPRIETÀ INVARIANTIVA $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$	Proprietà invariantiva delle frazioni: moltiplicando o dividendo numeratore e denominatore di una frazione per uno stesso numero diverso da 0, ottengo una frazione equivalente a quella data	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}} = \sqrt[np]{a^{mp}}$	$\sqrt[5]{2^3} = 2^{\frac{3}{5}} = 2^{\frac{21}{35}} = \sqrt[35]{2^{21}}$
SEMPLIFICAZIONE DI RADICALI $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$	Semplificazione di frazioni	$\sqrt[np]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{np}} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt[35]{2^{21}} = 2^{\frac{21}{35}} = 2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$
RIDUZIONE DI PIÙ RADICALI ALLO STESSO INDICE	Riduzione di più frazioni allo stesso denominatore	$\sqrt[n]{a^m} \quad \sqrt[p]{b^q}$ $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}} \quad b^{\frac{q}{p}} = b^{\frac{nq}{np}}$ $\sqrt[np]{a^{mp}} \quad \sqrt[np]{b^{nq}}$	$\sqrt[6]{2^5} \quad \sqrt[9]{7^8}$ $2^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{15}{18}} \quad 7^{\frac{8}{9}} = 7^{\frac{16}{18}}$ $\sqrt[18]{2^{15}} \quad \sqrt[18]{7^{16}}$

OPERAZIONI SUI RADICALI IN R^+_0

MOLTIPLICAZIONE DI RADICALI	Prodotto di potenze che hanno la stessa base (l'operazione che si compie è la somma di frazioni)	$\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[p]{a^q} = a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{q}{p}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{q}{p}} = a^{\frac{mp+qn}{np}} = \sqrt[np]{a^{mp+qn}}$	$\sqrt[4]{2^3}\cdot\sqrt[6]{2^5} = 2^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{3}{4}+\frac{5}{6}} = 2^{\frac{9+10}{12}} = \sqrt[12]{2^{19}}$
	Prodotto di potenze che hanno lo stesso esponente (in questo caso basta che le frazioni all'esponente abbiano lo stesso denominatore)	$\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[p]{b^q} = a^{\frac{m}{n}}\cdot b^{\frac{q}{p}} = a^{\frac{mp}{np}}\cdot b^{\frac{qn}{np}} = \left(a^{mp}\cdot b^{qn}\right)^{\frac{1}{np}} = \sqrt[np]{a^{mp}\cdot b^{qn}}$	$\sqrt[4]{2^3}\cdot\sqrt[6]{3^5} = 2^{\frac{3}{4}}\cdot 3^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{9}{12}}\cdot 3^{\frac{10}{12}} = \left(2^9\cdot 3^{10}\right)^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2^9\cdot 3^{10}}$
QUOZIENTE DI RADICALI	Quoziente di potenze che hanno la stessa base (l'operazione che si compie è la differenza di frazioni)	$\sqrt[n]{a^m}:\sqrt[p]{a^q} = a^{\frac{m}{n}}:a^{\frac{q}{p}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{q}{p}} = a^{\frac{mp-qn}{np}} = \sqrt[np]{a^{mp-qn}}$	$\sqrt[6]{2^5}:\sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{5}{6}}:2^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{5}{6}-\frac{3}{4}} = 2^{\frac{10-9}{12}} = \sqrt[12]{2}$
	Quoziente di potenze che hanno lo stesso esponente (in questo caso basta che le frazioni all'esponente abbiano lo stesso denominatore)	$\sqrt[n]{a^m}:\sqrt[p]{b^q} = a^{\frac{m}{n}}:b^{\frac{q}{p}} = a^{\frac{mp}{np}}:b^{\frac{qn}{np}} = \left(a^{mp}:b^{qn}\right)^{\frac{1}{np}} = \sqrt[np]{a^{mp}:b^{qn}} = \sqrt[np]{\frac{a^{mp}}{b^{qn}}}$	$\sqrt[4]{2^3}:\sqrt[6]{3^5} = 2^{\frac{3}{4}}:3^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{9}{12}}:3^{\frac{10}{12}} = \left(2^9:3^{10}\right)^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2^9:3^{10}} = \sqrt[12]{\frac{2^9}{3^{10}}}$
SOMMA E DIFFERENZA DI RADICALI	Somma di monomi simili	Si possono sommare solo i coefficienti dei radicali simili $a+3a=4a$	$\sqrt{2}+3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
TRASPORTO DI UN FATTORE SOTTO IL SEGNO DI RADICE	Riduzione di frazioni allo stesso denominatore	$a^p\cdot\sqrt[n]{b^m} = a^p\cdot b^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{pn}{n}}\cdot b^{\frac{m}{n}} = \left(a^{pn}\cdot b^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^{pn}\cdot b^m}$	$2^3\cdot\sqrt[4]{3^3} = 2^3\cdot 3^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{12}{4}}\cdot 3^{\frac{3}{4}} = \left(2^{12}\cdot 3^3\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2^{12}\cdot 3^3}$
TRASPORTO DI UN FATTORE FUORI DAL SEGNO DI RADICE		(Sia $m>n \Rightarrow m=kn+p$) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{kn+p}{n}} = a^{\frac{kn}{n}+\frac{p}{n}} = a^{k+\frac{p}{n}} = a^k\cdot a^{\frac{p}{n}} = a^k\sqrt[n]{a^p}$	$\sqrt[11]{2^{35}} = 2^{\frac{35}{11}} = 2^{\frac{3\cdot 11+2}{11}} = 2^{\frac{3\cdot 11}{11}+\frac{2}{11}} = 2^{3+\frac{2}{11}} = 2^3\cdot 2^{\frac{2}{11}} = 2^3\sqrt[11]{2^2}$
POTENZA DI UN RADICALE	Potenza di potenza	$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = a^{\frac{m}{n}\cdot p} = a^{\frac{mp}{n}} = \sqrt[n]{a^{mp}}$	$\left(\sqrt[4]{2^3}\right)^{14} = \left(2^{\frac{3}{4}}\right)^{14} = 2^{\frac{3}{4}\cdot 14} = 2^{\frac{21}{2}} = \sqrt[2]{2^{21}}$
RADICE DI RADICE	Potenza di potenza	$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{m}{np}} = \sqrt[np]{a^m}$	$\sqrt[21]{\sqrt[9]{2^{14}}} = \sqrt[21]{2^{\frac{14}{9}}} = \left(2^{\frac{14}{9}}\right)^{\frac{1}{21}} = 2^{\frac{2}{27}} = \sqrt[27]{2^2}$

RAZIONALIZZAZIONE	Frazione complementare rispetto all'unità	Sia: $\frac{k}{n}$ frazione complementare rispetto all'unità di $\frac{m}{n}$, ovvero: $\frac{m+k}{n}=1$ $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}=\frac{a}{b^{\frac{m}{n}}}=\frac{a}{b^{\frac{m}{n}}}\cdot\frac{b^{\frac{k}{n}}}{b^{\frac{k}{n}}}=$ $=\frac{a\cdot b^{\frac{k}{n}}}{b^{\frac{m+k}{n}}}=\frac{a\cdot b^{\frac{k}{n}}}{b}=\frac{a\sqrt[n]{b^k}}{b}$	$\frac{2}{\sqrt[8]{3^5}}=\frac{2}{3^{\frac{5}{8}}}=\frac{2}{3^{\frac{5}{8}}}\cdot\frac{3^{\frac{3}{8}}}{3^{\frac{3}{8}}}=$ $=\frac{2\cdot 3^{\frac{3}{8}}}{3^{\frac{5+3}{8}}}=\frac{2\cdot 3^{\frac{3}{8}}}{3}=\frac{2\sqrt[8]{3^3}}{3}$
	Prodotti notevoli: differenza di quadrati	$\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}=\frac{a}{b^{\frac{1}{2}}\pm c^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{b^{\frac{1}{2}}\mp c^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}\mp c^{\frac{1}{2}}}=$ $=\frac{a\left(b^{\frac{1}{2}}\mp c^{\frac{1}{2}}\right)}{b^{\frac{2}{2}}-c^{\frac{2}{2}}}=\frac{a\left(\sqrt{b}\mp\sqrt{c}\right)}{b-c}$	$\frac{14}{\sqrt{13}\pm\sqrt{6}}=\frac{14}{13^{\frac{1}{2}}\pm 6^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{13^{\frac{1}{2}}\mp 6^{\frac{1}{2}}}{13^{\frac{1}{2}}\mp 6^{\frac{1}{2}}}=$ $=\frac{14\left(13^{\frac{1}{2}}\mp 6^{\frac{1}{2}}\right)}{13^{\frac{2}{2}}-6^{\frac{2}{2}}}=\frac{14\left(\sqrt{13}\mp\sqrt{6}\right)}{13-6}=$ $=2\left(\sqrt{13}\mp\sqrt{6}\right)$
	Prodotti notevoli: somma o differenza di cubi	$\frac{a}{\sqrt[3]{b}\pm\sqrt[3]{c}}=\frac{a}{b^{\frac{1}{3}}\pm c^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{b^{\frac{2}{3}}\mp b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}\mp b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{2}{3}}}=$ $=\frac{a\left(b^{\frac{2}{3}}\mp b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{2}{3}}\right)}{b^{\frac{3}{3}}\pm c^{\frac{3}{3}}}=\frac{a\left(\sqrt[3]{b^2}\mp\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2}\right)}{b\pm c}$	$\frac{60}{\sqrt[3]{18}\pm\sqrt[3]{3}}=\frac{60}{18^{\frac{1}{3}}\pm 3^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{18^{\frac{2}{3}}\mp 18^{\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{2}{3}}}{18^{\frac{2}{3}}\mp 18^{\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{2}{3}}}=$ $=\frac{60\left(18^{\frac{2}{3}}\mp 18^{\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{2}{3}}\right)}{18^{\frac{3}{3}}\pm 3^{\frac{3}{3}}}=$ $=\frac{60\left(\sqrt[3]{18^2}\mp\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{3^2}\right)}{18\pm 3}$