Risolvi le seguenti equazioni:

1. $\frac{x^2(x^2-3)}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}\,x^2$

$$x^4 - 3x^2 + 4x^2 = 0 \qquad x^4 + x^2 = 0 \qquad x^2\,(x^2+1) = 0 \qquad x_{1,2} = \mathbf{0}$$

2. $(x+1)^6 + 9\,(x+1)^3 + 8 = 0$

$$Pongo: (x+1)^3 = y \qquad y^2 + 9y + 8 = 0 \qquad y_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81-32}}{2} = \left\langle \begin{matrix} -1 \\ -8 \end{matrix} \right.$$

$$(x+1)^3 = -1 \qquad x+1 = -1 \qquad x_1 = \mathbf{-2}$$

$$(x+1)^3 = -8 \qquad x+1 = -2 \qquad x_2 = \mathbf{-3}$$

3. $x^3 - \frac{73}{8}x^2 + \frac{73}{8}x - 1 = 0$

$P(1) = 0$ Applichiamo la regola di Ruffini:

	1	$-\frac{73}{8}$	$\frac{73}{8}$	-1
1		1	$-\frac{65}{8}$	1
	1	$-\frac{65}{8}$	1	0

$x_1 = \mathbf{1}$

$$8x^2 - 65x + 8 = 0 \qquad x_{2,3} = \frac{65 \pm \sqrt{65^2 - 16^2}}{16} = \left\langle \begin{matrix} \mathbf{8} \\ \mathbf{\frac{1}{8}} \end{matrix} \right.$$

4. $\frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{x} = 0$

$$\frac{x^4 - 16}{16\,x} = 0 \qquad C.A.: x \neq 0 \qquad (x^2-4)(x^2+4) = 0 \qquad x_{1,2} = \pm 2$$

Risolvi e discuti le seguenti equazioni:

5. $kx^2 + (2k-3)x + k - 3 = 0$

$$\Delta = (2k-3)^2 - 4k\,(k-3) = 4k^2 - 12\,k + 9 - 4k^2 + 12\,k = 9$$

$$Se\ k \neq 0: \qquad x_{1,2} = \frac{-2k+3 \pm 3}{2k} = \left\langle \begin{matrix} \frac{-2k+6}{2k} = \frac{2(3-k)}{2k} = \mathbf{\frac{3-k}{k}} \\ -\frac{2k}{2k} = \mathbf{-1} \end{matrix} \right.$$

$$Se\ k = 0: \qquad -3x - 3 = 0 \qquad x = \mathbf{-1}$$

6. $kx\,(x-3) - 3k + 9 = (x-k)\,x$

$$kx^2 - 3kx - 3k + 9 = x^2 - kx \qquad (k-1)\,x^2 - 2kx - 3k + 9 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = k^2 - (k-1)(-3k+9) = k^2 + 3k^2 - 9k - 3k + 9 = 4k^2 - 12k + 9 = (2k-3)^2$$

$$Se\ k \neq 1: \qquad x_{1,2} = \frac{k \pm (2k-3)}{k-1} = \left\langle \begin{matrix} \frac{3k-3}{k-1} = \frac{3\,(k-1)}{k-1} = \mathbf{3} \\ \mathbf{\frac{3-k}{k-1}} \end{matrix} \right.$$

$$Se\ k = 1: \qquad -2x + 6 = 0 \qquad x = \mathbf{3}$$

7. Determina i valori del parametro per i quali la seguente equazione, nell'incognita x, soddisfa le condizioni indicate:

$$5x^2 + (2 - 10\,k)x + 5k^2 - 3 = 0$$

A. le radici sono reali e distinte;

Perché le radici siano reali e distinte, dev'essere $\Delta > 0$:

$$\frac{\Delta}{4} = (1-5k)^2 - 5\,(5k^2-3) = 1 - 10\,k + 25\,k^2 - 25\,k^2 + 15 = -10k + 16 > 0 \qquad \boldsymbol{k < \frac{8}{5}}$$

B. la somma delle radici è positiva;

La somma delle radici è data dall'opposto del rapporto tra il coefficiente del termine di primo grado e quello di secondo grado:

$$-\frac{2-10\,k}{5} > 0 \qquad -2 + 10\,k > 0 \qquad k > \frac{1}{5}$$

Questo risultato va messo a sistema con il risultato di realtà delle radici, ovvero $\Delta \geq 0$: $k \leq \frac{8}{5}$:

$$\begin{cases} k \leq \frac{8}{5} \\ k > \frac{1}{5} \end{cases} \qquad \boldsymbol{\frac{1}{5} < k \leq \frac{8}{5}}$$

C. il prodotto delle radici è nullo;

Il prodotto delle radici è dato dal rapporto tra il termine noto e il coefficiente del termine di secondo grado:

$$\frac{5k^2-3}{5} = 0 \qquad k^2 = \frac{3}{5} \qquad k_{1,2} = \boldsymbol{\pm\frac{\sqrt{15}}{5}}$$

Le soluzioni sono entrambe accettabili, perché entrambe minori di $\frac{8}{5}$.

D. la somma delle radici è uguale al loro prodotto;

$$-\frac{b}{a} = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad b = -c \quad \Rightarrow \quad 2 - 10\,k = -5\,k^2 + 3 \quad \Rightarrow \quad 5\,k^2 - 10\,k - 1 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+5}}{5} = \left\langle \begin{array}{ll} 1 + \frac{\sqrt{30}}{5} & \quad \mathit{non\ accettabile} \\ \boldsymbol{1 - \frac{\sqrt{30}}{5}} & \quad \mathit{accettabile} \end{array} \right.$$

E. la somma dei quadrati delle soluzioni vale $\frac{44}{25}$.

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{44}{25} \quad \Rightarrow \quad (x_1+x_2)^2 - 2\,x_1x_2 = \frac{44}{25} \quad \Rightarrow \quad \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a} = \frac{44}{25}$$

$$\frac{(2-10\,k)^2}{25} - 2\frac{5k^2-3}{5} = \frac{44}{25} \qquad 4 - 40\,k + 100\,k^2 - 50\,k^2 + 30 = 44$$

$$50\,k^2 - 40\,k - 10 = 0 \qquad 5\,k^2 - 4k - 1 = 0 \qquad k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+5}}{5} = \left\langle \begin{array}{l} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{-\frac{1}{5}} \end{array} \right. \ acc.$$

8. Madre e figlia hanno una differenza di età di 32 anni. Tra 4 anni il quadrato dell'età della figlia sommato al quadrato dell'età della madre sarà uguale al prodotto delle loro età aumentato di 1444. Determina le età di madre e figlia.

Indichiamo con x l'età della figlia e con $32 + x$ l'età della madre. Tra quattro anni avranno, rispettivamente, $x + 4$ e $x + 36$ anni. Perciò:

$$(x+4)^2 + (x+36)^2 = (x+4)(x+36) + 1444$$

$$x^2 + 8\,x + 16 + x^2 + 72\,x + 1296 = x^2 + 36\,x + 4\,x + 144 + 1444$$

$$x^2 + 40\,x - 276 = 0 \qquad x_{1,2} = -20 \pm \sqrt{400 + 276} = \left\langle \begin{array}{l} -46\ \ non\ accettabile \\ \ \ 6\ accettabile \end{array} \right.$$

L'età della figlia è **6 anni**, quella della madre **38 anni**.

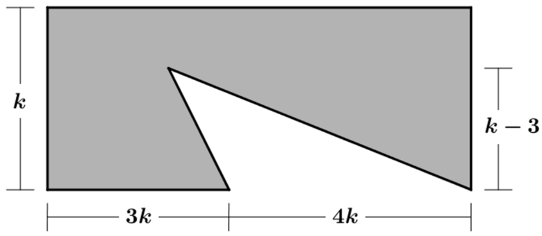
9. Trova il valore di k per il quale l'area colorata della figura 1 è $144\ cm^2$.

Per determinare l'area della figura in funzione di k, calcolo l'area del rettangolo e sottraggo l'area del triangolo tagliato, di base $4\,k$ e altezza $k - 3$:

$$(3k + 4k)\ \cdot k - \frac{1}{2} \cdot 4k\ (k-3) = 144$$

$$7\,k^2 - 2\,k^2 + 6k - 144 = 0$$

$$5\,k^2 + 6\,k - 144 = 0 \qquad k_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 720}}{5} = \left\langle \begin{array}{l} \ \ \mathbf{4{,}8} \\ -6\ \ n.a. \end{array} \right.$$



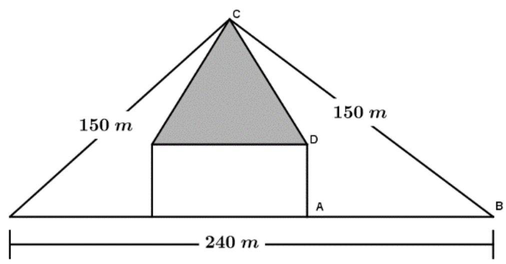
10. Un padre vuole lasciare ai quattro figli una proprietà che ha la forma di un triangolo isoscele (figura 2), con la base di $240\ m$ e il lato obliquo di $150\ m$, dividendola in quattro parti equivalenti. Il maggiore dei figli vuole la proprietà a forma di rettangolo, il secondo vuole la parte rappresentata dal triangolo isoscele più piccolo, in grigio. Qual è il perimetro della parte che spetterà al più giovane dei quattro figli?

Applicando il teorema di Pitagora, determino l'altezza del triangolo grande:

$$\sqrt{150^2 - 120^2}\ m = 90\ m$$

Perciò l'area del triangolo è: $\frac{1}{2} \cdot 240\ m \cdot 90\ m = 10800\ m^2$

L'area di ogni singola parte è un quarto del totale, ovvero: $2700\ m^2$.



L'area del rettangolo e del triangolo grigio sono entrambe uguali a $2700\ m^2$ e rettangolo e triangolo sono equivalenti quando, avendo la base congruente, il triangolo ha un'altezza doppia di quella del rettangolo. Perciò, se l'altezza del triangolo è doppia di quella del rettangolo, l'altezza del triangolo vale $60\ m$ e quella del rettangolo $30\ m$.
Possiamo quindi determinare le dimensioni del quadrilatero ABCD:

$$\overline{AB} = \frac{240 - 90}{2} m = 75\ m \qquad \overline{AD} = y = 30\ m \qquad \overline{BC} = 150\ m$$

Per determinare l'ultima dimensione, il lato $\overline{CD}$, uso il teorema di Pitagora:

$$\overline{CD} = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + (90 - y)^2} = \sqrt{45^2 + 60^2}\ m = 15\sqrt{3^2 + 4^2}\ m = 75\ m$$

A questo punto posso determinare il perimetro:

$$2p = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{BC} + \overline{CD} = \mathbf{330\ m}$$

11. Due numeri reali x_1 e x_2 sono tali che $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}$. La somma dei loro quadrati supera di 2 la somma dei loro reciproci. Quali sono, se esistono, tali numeri?

La somma dei quadrati supera di 2 la somma dei loro reciproci:

$$x_1^2 + x_2^2 = 2 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \qquad (x_1 + x_2)^2 - 2\,x_1 x_2 = 2 + \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$$

Sostituendo il valore del prodotto dato:

$$(x_1 + x_2)^2 - 1 = 2 + 2\,(x_1 + x_2)$$

Pongo: $y = x_1 + x_2$:

$$y^2 - 2y - 3 = 0 \qquad y_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix} \right.$$

Abbiamo quindi due equazioni da considerare, una in cui la somma delle soluzioni vale 3 e una in cui vale -1. In entrambi i casi, il prodotto è $\frac{1}{2}$:

$$x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0 \qquad 2x^2 - 6x + 1 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-2}}{2} = \mathbf{\frac{3 \pm \sqrt{7}}{2}}$$

$$x^2 + x + \frac{1}{2} = 0 \qquad 2x^2 + 2x + 1 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-2}}{2} \qquad \nexists x \in \mathbb{R}$$

Solo due numeri soddisfano le richieste:

$$x_{1,2} = \mathbf{\frac{3 \pm \sqrt{7}}{2}}$$