

29. Trovo l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y , che passa per $A(0; 1)$ e $B(-1; -1)$, punto in cui è tangente alla retta $y - x = 0$.

Impongo il passaggio della parabola per i punti A e B , sostituendo le coordinate dei punti nella generica equazione della parabola, $y = ax^2 + bx + c$:

$$\begin{cases} 1 = c \\ -1 = a - b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = a + 2 \end{cases} \Rightarrow y = ax^2 + (a + 2)x + 1$$

Metto a sistema la generica equazione della parabola (in funzione di a) con l'equazione della retta tangente, imponendo $\Delta = 0$ nella risolvente:

$$\begin{cases} y = ax^2 + (a + 2)x + 1 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow ax^2 + ax + 2x + 1 = x \Rightarrow ax^2 + x(a + 1) + 1 = 0$$

$$\Delta = (a + 1)^2 - 4a = 0 \Rightarrow a^2 + 2a + 1 - 4a = 0 \Rightarrow (a - 1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$y = x^2 + 3x + 1$$

30. Trova le equazioni delle rette tangenti alla parabola di equazione $y = -x^2 + 4x$ nei suoi punti d'intersezione con l'asse delle ascisse; trova poi l'area del triangolo formato dalle rette tangenti e dall'asse delle ascisse.

Determino le intersezioni tra la parabola e la retta, mettendo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^2 + 4x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x(x - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 & y = 0 \\ x = 4 & y = 0 \end{cases}$$

Dati i due punti $A(4; 0)$ e $O(0; 0)$, determino le generiche rette passanti per essi: $y = m_1(x - 4)$ e $y = m_2x$. Determino i valori di m_1 e m_2 , mettendo a sistema le due equazioni rispettivamente con l'equazione della parabola e ponendo $\Delta = 0$ nelle risolventi:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ y = m_1x - 4m_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1x - 4m_1 = -x^2 + 4x \\ y = m_1x - 4m_1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x(m_1 - 4) - 4m_1 = 0$$

$$\Delta = (m_1 - 4)^2 + 16m_1 = 0 \Rightarrow m_1^2 - 8m_1 + 16 + 16m_1 = 0 \Rightarrow (m_1 + 4)^2 = 0 \Rightarrow m_1 = -4$$

$$y = -4x + 16$$

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ y = m_2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_2x = -x^2 + 4x \\ y = m_2x \end{cases} \Rightarrow x^2 + x(m_2 - 4) = 0$$

$$\Delta = (m_2 - 4)^2 = 0 \Rightarrow m_2 = 4 \Rightarrow y = 4x$$

Determino il punto di intersezione tra le due tangenti, mettendo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} y = -4x + 16 \\ y = 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = -4x + 16 \\ y = 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x = 16 \\ y = 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow B(2; 8)$$

Determino l'area del triangolo OAB: considerato che è un triangolo isoscele, determino l'area come $A = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{BH}}{2}$, dove BH è l'altezza del triangolo e corrisponde all'ordinata di B:

$$\overline{OA} = |x_A - x_O| = 4 \Rightarrow A = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16$$