23. Determina la parabola con asse parallelo all'asse x che ha come fuoco il punto $F\left(-\frac{1}{2};\,0\right)$ e come direttrice la retta di equazione 2 x – 1 = 0.

Secondo la definizione, la parabola è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto fuoco e da una retta fissa detta direttrice:

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-0)^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad x^2+x+\frac{1}{4}+y^2=x^2-x+\frac{1}{4}$$

$$2x=-y^2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{x=-\frac{1}{2}y^2}$$

24. Determina il punto d'incontro delle due tangenti alla parabola di equazione 2 y + x² – 7 x + 4 = 0 condotte per i punti comuni ad essa e alla retta di equazione x – 2 y + 1 = 0.

Metto innanzi tutto a sistema la parabola con la retta, per determinare i punti di intersezione:

$$\begin{cases} 2y+x^2-7x+4=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}x-2 \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}x-2 \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x^2-6x+5=0 \quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-5}}{1}=\left\langle \begin{matrix} 5 & \quad y=3 \\ 1 & \quad y=1 \end{matrix}\right.$$

$$\boxed{A\,(5;3) \qquad B\,(1;1)}$$

Determino l'equazione della generica retta passante per il punto A e la metto a sistema con l'equazione della parabola, ponendo Δ = 0 nella risolvente. Procedo analogamente per il punto B.

$$\begin{cases} y-3=m\,(x-5) \\ y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3+m\,x-5\,m \\ 3+m\,x-5\,m=-\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}x-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^2+x\,(2m-7)+10-10m=0 \quad\Rightarrow\quad \Delta=(2m-7)^2-4\,(10-10m)=0$$

$$4m^2-28m+49-40+40m=0 \quad\Rightarrow\quad 4m^2+12m+9=0 \quad\Rightarrow\quad (2m+3)^2=0 \quad\Rightarrow\quad m=-\frac{3}{2}$$

$$y=-\frac{3}{2}x+\frac{21}{2}$$

$$\begin{cases} y-1=m\,(x-1) \\ y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1+m\,x-m \\ 1+m\,x-m=-\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2}x-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^2+x\,(2m-7)+6-2m=0 \quad\Rightarrow\quad \Delta=(2m-7)^2-4\,(6-2m)=0$$

$$4m^2 - 28m + 49 - 24 + 8m = 0 \quad \Rightarrow \quad 4m^2 - 20m + 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2m-5)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{5}{2}$$

$$y = \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$$

Metto a sistema le equazioni delle due rette tangenti:

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + \frac{21}{2} \\ y = \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}x + \frac{21}{2} \\ y = \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C\,(3;\,6)$$

25. Data la parabola di equazione: y = x^2 – 7x + 10, trova la misura del segmento che essa determina intersecando la retta di equazione y = x + 3.

Determino le coordinate dei punti di intersezione tra retta e parabola, mettendo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} y = x^2 - 7x + 10 \\ y = x + 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = x + 3 \\ x^2 - 7x + 10 = x + 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$x^2 - 8x + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-7}}{1} = \left\langle \begin{matrix} 7 & \quad y = 10 \\ 1 & \quad y = 4 \end{matrix} \right.$$

$$A\,(7;\,10) \qquad B\,(1;\,4)$$

Determino la lunghezza del segmento AB:

$$\overline{AB} = \sqrt{(7-1)^2 + (10-4)^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{6^2\,(1+1)} = 6\sqrt{2}$$

26. Scrivi l'equazione della retta passante per i punti di intersezione delle due parabole: y = 2 x^2 + x – 1 e y = x^2 + 3 x + 2.

Determino le coordinate dei punti di intersezione tra le due parabole, mettendo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} y = 2x^2 + x - 1 \\ y = x^2 + 3x + 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = x^2 + 3x + 2 \\ 2x^2 + x - 1 = x^2 + 3x + 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{1} = \left\langle \begin{matrix} 3 & \quad y = 20 \\ -1 & \quad y = 0 \end{matrix} \right.$$

$$A\,(3;\,20) \qquad B\,(-1;\,0)$$

Determino l'equazione della retta passante per i punti A e B:

$$\frac{x+1}{3+1} = \frac{y}{20} \quad \Rightarrow \quad 5x + 5 = y \quad \Rightarrow \quad y = 5x + 5$$

27. Data la parabola di equazione: y = – x² + 8x – 7 e la retta y = x, che taglia la parabola nei punti P e Q, trova l'area del trapezio che ha per basi le perpendicolari condotte da P e da Q all'asse delle x.

Determino le coordinate dei punti di intersezione tra la retta e la parabola, mettendo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 8x - 7 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -x^2 + 8x - 7 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x^2 - 7x + 7 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 28}}{2} = \left\langle \begin{array}{ll} \dfrac{7+\sqrt{21}}{2} & y = \dfrac{7+\sqrt{21}}{2} \\ \dfrac{7-\sqrt{21}}{2} & y = \dfrac{7-\sqrt{21}}{2} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$P\left(\frac{7+\sqrt{21}}{2}; \frac{7+\sqrt{21}}{2}\right) \quad e \quad Q\left(\frac{7-\sqrt{21}}{2}; \frac{7-\sqrt{21}}{2}\right)$$

La retta perpendicolare all'asse x e passante per P ha equazione $x = \frac{7+\sqrt{21}}{2}$ e interseca l'asse x nel punto $A\left(\frac{7+\sqrt{21}}{2}; 0\right)$, mentre la retta perpendicolare all'asse x e passante per Q ha equazione $x = \frac{7-\sqrt{21}}{2}$ e interseca l'asse x nel punto $B\left(\frac{7-\sqrt{21}}{2}; 0\right)$.

Il trapezio è rettangolo, perciò determino l'area come: $A = \frac{(\overline{AP} + \overline{QB}) \cdot \overline{AB}}{2}$

$$\overline{AP} = |y_P - y_A| = \frac{7+\sqrt{21}}{2} \quad e \quad \overline{BQ} = |y_Q - y_B| = \frac{7-\sqrt{21}}{2}$$

$$\overline{AB} = |x_B - x_A| = \left|\frac{7-\sqrt{21}}{2} - \frac{7+\sqrt{21}}{2}\right| = \sqrt{21}$$

$$A = \frac{\left(\frac{7+\sqrt{21}}{2} + \frac{7-\sqrt{21}}{2}\right) \cdot \sqrt{21}}{2} = \boxed{\frac{7}{2}\sqrt{21}}$$

28. Tra le parabole di equazione y = a x² – (a – 1) x + 2, trova quella il cui vertice ha l'ascissa doppia dell'ordinata.

Determino le coordinate del vertice:

$$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{a-1}{2a}; -\frac{a^2 - 2a + 1 - 8a}{4a}\right) = \left(\frac{a-1}{2a}; \frac{-a^2 + 10a - 1}{4a}\right)$$

Impongo l'ascissa doppia dell'ordinata:

$$\frac{a-1}{2a} = 2\,\frac{-a^2 + 10a - 1}{4a} \Rightarrow a - 1 = -a^2 + 10a - 1 \Rightarrow a^2 - 9a = 0$$

$$a = 0 \quad non\ accettabile \qquad a = 9 \Rightarrow \boxed{y = 9x^2 - 8x + 2}$$