16. Conduci una retta tangente alla parabola y = 6 x² – 7 x + 1 e parallela alla retta 5 x – y = 0.

Metto in forma esplicita la retta cui dev'essere parallela la tangente: $y = 5x$. La generica equazione della tangente avrà lo stesso coefficiente angolare, ovvero 5, perciò sarà del tipo: $y = 5x + q$. Ora metto a sistema l'equazione della retta $y = 5x + q$ con l'equazione della parabola. Infine pongo Δ = 0 nella risolvente:

$$\begin{cases} y = 5x + q \\ y = 6x^2 - 7x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5x + q \\ 5x + q = 6x^2 - 7x + 1 \end{cases} \Rightarrow 6x^2 - 12x + 1 - q = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 36 - 6(1 - q) = 0 \Rightarrow 6 - 1 + q = 0 \Rightarrow q = -5 \Rightarrow y = 5x - 5$$

17. Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, avente il vertice nel punto V (1; 4) e tangente alla retta di equazione
y = 2x + 3.

Pongo la generica ascissa del vertice uguale a quella nota e impongo il passaggio della parabola per il vertice, sostituendo le coordinate del vertice nella generica equazione $y = ax^2 + bx + c$:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ 4 = a + b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ 4 = a - 2a + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ c = a + 4 \end{cases} \Rightarrow y = ax^2 - 2ax + a + 4$$

Ora metto a sistema l'equazione della retta con la generica equazione della parabola. Infine pongo Δ = 0 nella risolvente:

$$\begin{cases} y = ax^2 - 2ax + a + 4 \\ y = 2x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3 = ax^2 - 2ax + a + 4 \\ y = 2x + 3 \end{cases} \Rightarrow ax^2 - 2x(a + 1) + 1 + a = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = (a + 1)^2 - a(1 + a) = 0 \Rightarrow a^2 + 2a + 1 - a - a^2 = 0 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow$$

$$y = -x^2 + 2x + 3$$

18. Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, passante per i punti $A\left(1; -\frac{1}{2}\right)$ e $B\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ e tangente all'asse x.

Impongo il passaggio della parabola per i punti A e B, sostituendo le coordinate dei punti nella generica equazione $y = ax^2 + bx + c$:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} = a + b + c \\ 0 = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -\frac{1}{2} - a - b \\ 0 = a + 2b - 2 - 4a - 4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -\frac{1}{2} - a - b \\ 0 = -2b - 2 - 3a \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -\frac{1}{2} - a - b \\ b = -1 - \frac{3}{2}a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -\frac{1}{2} - a + 1 + \frac{3}{2}a \\ b = -1 - \frac{3}{2}a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a \\ b = -1 - \frac{3}{2}a \end{cases} \Rightarrow$$

$$y = ax^2 - \left(1 + \frac{3}{2}a\right)x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a$$

Essendo la parabola tangente all'asse x, $\Delta = 0$ per la parabola: $\left(1 + \frac{3}{2}a\right)^2 - 4a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a\right) = 0$

$$1 + 3a + \frac{9}{4}a^2 - 2a - 2a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}a^2 + a + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}a + 1\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -2$$

$$y = -2x^2 + 2x - \frac{1}{2}$$

19. Determina la parabola con asse parallelo all'asse y passante per i punti A (0; 1), B (2; 2) e C (4; 5). Scrivi quindi l'equazione della tangente ad essa nel punto di ascissa 1.

Impongo il passaggio della parabola per i punti A, B e C, sostituendo le coordinate dei punti nella generica equazione $y = ax^2 + bx + c$:

$$\begin{cases} 1 = c \\ 2 = 4a + 2b + c \\ 5 = 16a + 4b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ 4a + 2b = 1 \\ 16a + 4b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ 4a + 2b = 1 \\ 4a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c = 1 \\ b = 1 - 4a \\ 4a + 2 - 8a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = 1 - 4a \\ 4a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad y = \frac{1}{4}x^2 + 1$$

Determino l'ordinata del punto di ascissa 1, sostituendo l'ascissa nell'equazione della parabola:

$$y = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

Considerata la generica retta passante per il punto della parabola di ascissa 1: $y - \frac{5}{4} = m(x - 1)$ e la metto a sistema con l'equazione della parabola, imponendo $\Delta = 0$ nella risolvente:

$$\begin{cases} y = \frac{5}{4} + mx - m \\ y = \frac{1}{4}x^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{4} + mx - m \\ \frac{5}{4} + mx - m = \frac{1}{4}x^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{1}{4}x^2 - mx - \frac{1}{4} + m = 0$$

$$m^2 + \frac{1}{4} - m = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

20. Date le parabole di equazione $y = x^2 - x$ e $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$, verifica che le due parabole sono tangenti in un punto A e determinane le coordinate.

Metto a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} y = x^2 - x \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 - x \\ x^2 - x = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = x^2 - x \end{cases} \Rightarrow A\,(1;\,0)$$

Le due parabole sono tangenti, in quanto nella risolvente del sistema Δ = 0.

21. Determina la parabola con asse parallelo all'asse x che passa per l'origine e per i punti A (0; 4) e B (–4; 2).

Una parabola con asse parallelo all'asse x e passante per l'origine ha generica equazione $x = ay^2 + by$. Impongo il passaggio della parabola per i punti A e B, sostituendo le coordinate dei punti A e B nell'equazione generica della parabola:

$$\begin{cases} 0 = 16a + 4b \\ -4 = 4a + 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -4a \\ -2 = 2a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -4a \\ -2 = 2a - 4a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}$$

$$x = y^2 - 4y$$

22. Determina la parabola con asse parallelo all'asse x, che ha il vertice nel punto di intersezione delle due rette x + y – 2 = 0, x – y + 4 = 0 e passa per il punto P (0; 2).

Determino innanzi tutto le coordinate del vertice, mettendo a sistema le equazioni delle due rette:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases} \\ \hline 2x \quad +2 = 0 \\ x = -1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases} \\ \hline 2y - 6 = 0 \\ y = 3 \end{array} \Rightarrow V\,(-1;\,3)$$

Metto a sistema le tre condizioni: pongo la generica ordinata del vertice uguale al valore numerico del testo e impongo il passaggio della parabola per il vertice e per il punto P, sostituendo le coordinate dei due punti nella generica equazione della parabola:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 3 \\ -1 = 9a + 3b + c \\ 0 = 4a + 2b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -6a \\ -1 = 9a - 18a + c \\ 0 = 4a - 12a + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -6a \\ -1 = -9a + 8a \\ c = 8a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 8 \end{cases}$$

$$x = y^2 - 6y + 8$$