1. Scrivi l'equazione della parabola ad asse verticale che ha vertice $V(0;3)$ e fuoco $F(0;6)$ e rappresentala.

La generica equazione di una parabola ad asse verticale è: $y = ax^2 + bx + c$. Le generiche coordinate del vertice sono $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ e quelle del fuoco sono $F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$. Pongo le generiche coordinate uguali a quelle fornite nei dati e metto a sistema le equazioni ottenute:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 0 \\ -\frac{\Delta}{4a} = 3 \\ \frac{1-\Delta}{4a} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ \frac{4ac}{4a} = 3 \\ \frac{1+4ac}{4a} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 3 \\ 1 + 12a = 24a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 3 \\ a = \frac{1}{12} \end{cases}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{12}x^2 + 3}$$

2. Scrivi l'equazione della parabola ad asse verticale di vertice $V(2;1)$ e passante per l'origine e rappresentala.

La generica equazione di una parabola ad asse verticale è: $y = ax^2 + bx + c$, ma passando per l'origine la generica equazione è $y = ax^2 + bx$. Le generiche coordinate del vertice sono $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2}{4a}\right)$. Pongo le generiche coordinate uguali a quelle fornite nei dati e metto a sistema le equazioni ottenute:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ -\frac{b^2}{4a} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -4a \\ -\frac{16a^2}{4a} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -4a \\ -4a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{4}x^2 + x}$$

3. Determina i punti di intersezione tra la retta $r: y = x - 1$ e la parabola $y = x^2 - 2x + 1$

Metto a sistema le due equazioni per ottenere le coordinate dei punti di intersezione:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x - 1 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \left\langle \begin{array}{lll} 2 & \Rightarrow & y = 1 \\ 1 & \Rightarrow & y = 0 \end{array} \right.$$

$$\boxed{A(2;1) \qquad B(1;0)}$$

4. Scrivi l'equazione della tangente alla parabola di equazione $y = 2x^2 - 18$ passante per il suo punto $A(3;0)$.

Metto a sistema l'equazione della generica retta passante per il punto A con la parabola e pongo $\Delta = 0$ nella risolvente:

$$\begin{cases} y = mx - 3m \\ y = 2x^2 - 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 18 = mx - 3m \\ y = mx - 3m \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - mx - 18 + 3m = 0$$

$$\Delta = m^2 - 8(3m - 18) = 0 \Rightarrow m^2 - 24m + 144 = 0 \Rightarrow (m-12)^2 = 0 \Rightarrow m = 12$$

$$y = 12x - 36$$

5. Scrivi le equazioni delle tangenti alla parabola $y = -x^2 + 2x + 3$ condotte dal punto $P\left(\frac{1}{2}; 6\right)$.

Metto a sistema l'equazione della generica retta passante per il punto P con la parabola e pongo $\Delta = 0$ nella risolvente:

$$\begin{cases} y - 6 = mx - \frac{1}{2}m \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 + mx - \frac{1}{2}m \\ 6 + mx - \frac{1}{2}m = -x^2 + 2x + 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (m-2)x + 3 - \frac{1}{2}m = 0$$

$$\Delta = (m-2)^2 - 4\left(3 - \frac{1}{2}m\right) = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 - 12 + 2m = 0 \Rightarrow m^2 - 2m - 8 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{1} = \left\langle \begin{matrix} 4 \\ -2 \end{matrix} \right. \qquad y = 4x + 4 \qquad y = -2x + 7$$

6. Data la parabola $y = -x^2 + 4x - 1$ e la retta di equazione $2x - y + k = 0$, determina per quale valore di *k* la retta risulta tangente alla parabola.

Metto a sistema le due equazioni e pongo $\Delta = 0$ nella risolvente:

$$\begin{cases} y = 2x + k \\ y = -x^2 + 4x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + k \\ 2x + k = -x^2 + 4x - 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x + k + 1 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 1 - (k+1) = 0 \Rightarrow 1 - k - 1 = 0 \Rightarrow k = 0$$

$$y = 2x$$

7. Determinare l'equazione della parabola passante per il punto $(1;\,2)$, avente vertice nel punto $\left(2;\,\frac{3}{2}\right)$ e con asse parallelo all'asse *y*.

La generica equazione di una parabola ad asse verticale è: $y = ax^2 + bx + c$. Le generiche coordinate del vertice sono $V\left(-\frac{b}{2a};\,-\frac{\Delta}{4a}\right)$. Pongo la generica ascissa uguale a quella fornita nei dati e metto a sistema le equazioni ottenute con imponendo il passaggio della parabola per il punto e per il vertice:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ 2 = a + b + c \\ \dfrac{3}{2} = 4a + 2b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 2 = a - 4a + c \\ 3 = 8a + 4b + 2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -4a \\ c = 2 + 3a \\ 3 = 8a - 16a + 4 + 6a \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -4a \\ c = 2 + 3a \\ 2a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = \dfrac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{7}{2}}$$

8. Scrivi l'equazione della retta tangente alla parabola $y = 4x^2 - 1$ nel suo punto di ordinata 0.

Innanzi tutto determino l'ascissa del punto della parabola di ordinata 0, sostituendo l'ordinata nulla nell'equazione della parabola:

$$0 = 4x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$$

Metto a sistema l'equazione della generica retta passante per il punto di ordinata nulla con la parabola e pongo $\Delta = 0$ nella risolvente:

$$\begin{cases} y = mx \pm \dfrac{1}{2}m \\ y = 4x^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 - 1 = mx \pm \dfrac{1}{2}m \\ y = mx \pm \dfrac{1}{2}m \end{cases} \Rightarrow \quad 4x^2 - mx - 1 \mp \frac{1}{2}m = 0$$

$$\Delta = m^2 - 16\left(-1 \mp \frac{1}{2}m\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 \pm 8m + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad (m \pm 4)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \mp 4$$

$$\boxed{y = 4x - 2 \qquad y = -4x - 2}$$