Calcola il valore delle seguenti espressioni:

1. $$\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{28-10\sqrt{3}}}{15}$$

$$\frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}+\sqrt{\left(5-\sqrt{3}\right)^2}}{15}=\frac{\sqrt{3}+1+5-\sqrt{3}}{15}=\frac{6}{15}=\mathbf{\frac{2}{5}}$$

2. $$\frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{3\sqrt{2}-3+4-2\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+1}{2\left(1+\sqrt{2}\right)}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

3. $$\left[\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right):\sqrt{6}\right]\left(5-2\sqrt{6}\right)-1$$

$$\left[\left(3\sqrt{6}+6+6+2\sqrt{6}\right):\sqrt{6}\right]\left(5-2\sqrt{6}\right)-1=\left(5+\frac{12}{\sqrt{6}}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)-1=\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)-1=25-24-1=\mathbf{0}$$

4. $$\sqrt{\left(\sqrt{5}-2+\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}+2}\right):\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{7}-1}}-\sqrt{11-2\sqrt{30}}$$

$$\sqrt{\frac{5-4+\sqrt{7}}{\sqrt{5}+2}\cdot\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{5}-2}}-\sqrt{11-2\sqrt{30}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{5}+2}\cdot\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{5}-2}}-\sqrt{\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{6}-\sqrt{6}+\sqrt{5}=\mathbf{\sqrt{5}}$$

5. $$\sqrt{a^6+a^4}+\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^6+3a^4+3a^2+1}$$

$$\sqrt{a^4\left(a^2+1\right)}+\sqrt{a^2+1}-\sqrt{\left(a^2+1\right)^3}=a^2\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2+1}-\left(a^2+1\right)\sqrt{a^2+1}=\sqrt{a^2+1}\left(a^2+1-a^2-1\right)=\mathbf{0}$$

6. $$\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}+\sqrt{y}}-\frac{2x+y}{2x-y}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2x}-\sqrt{y}}$$

$$C.E.:\ x\geq 0\ \wedge\ y\geq 0\ \wedge\ y\neq 2x$$

$$\frac{2x-\sqrt{2xy}-2x-y+\sqrt{2xy}+y}{\left(\sqrt{2x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{2x}-\sqrt{y}\right)}=\mathbf{0}$$

7. $$\sqrt[3]{\frac{1-a}{(a+2)^2}}\cdot\sqrt{\frac{a+2}{a-1}}:\sqrt[6]{\frac{a^2+4a+4}{a-1}}$$

$$C.E.: \begin{cases} \dfrac{a+2}{a-1}\geq 0 \\ a+2\neq 0 \\ a-1>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a\leq -2 \;\vee\; a>1 \\ a\neq -2 \\ a>1 \end{cases} \qquad a>1$$

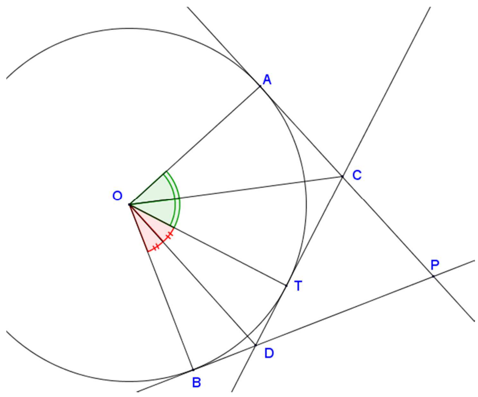
$$\frac{(1-a)^{\frac13}}{(a+2)^{\frac23}}\cdot\frac{(a+2)^{\frac12}}{(a-1)^{\frac12}}\cdot\frac{(a-1)^{\frac16}}{(a+2)^{\frac26}}=-\frac{(a-1)^{\frac13+\frac16-\frac12}}{(a+2)^{\frac23-\frac12+\frac26}}=-\frac{1}{(a+2)^{\frac12}}=-\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{a+2}}}$$

8. $$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{8}}\;:\;\sqrt[4]{16\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt[8]{2}}\right)^2-\frac{2}{\sqrt[4]{2}}$$

$$\left(\left(2\cdot 2^{\frac33}\right)^{\frac12}:\left(2^4\cdot 2^{\frac12}\right)^{\frac14}+\frac{1}{\sqrt[8]{2}}\right)^2-\frac{2}{\sqrt[4]{2}}=\left(2:2^{\frac98}+\frac{1}{\sqrt[8]{2}}\right)^2-\frac{2}{\sqrt[4]{2}}=\left(\frac{1}{\sqrt[8]{2}}+\frac{1}{\sqrt[8]{2}}\right)^2-\frac{2}{\sqrt[4]{2}}=$$

$$=\left(\frac{2}{\sqrt[8]{2}}\right)^2-\frac{2}{\sqrt[4]{2}}=\frac{4}{\sqrt[4]{2}}-\frac{2}{\sqrt[4]{2}}=\frac{2}{\sqrt[4]{2}}=2^{1-\frac14}=2^{\frac34}=\boldsymbol{\sqrt[4]{8}}$$

9. Da un punto P esterno a una circonferenza di centro O conduci le due tangenti alla circonferenza e siano A e B i due punti di contatto. Sia T (interno all'arco AB minore di una semicirconferenza) il punto di contatto di una terza tangente alla circonferenza, che interseca la retta PA in C e la retta PB in D. Dimostra che l'angolo $C\hat{O}D$ è metà dell'angolo convesso $A\hat{O}B$.



Hp:
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}, O, r & t_1\cap\mathcal{C}=\{A\} & T\in s_1\cap s_2 \\ OP>r & t_2\cap\mathcal{C}=\{B\} & s_1\cap t_1=\{C\} \\ P\in t_1\cap t_2 & T\in\widehat{AB}<\mathcal{C}/2 & s_2\cap t_2=\{D\} \end{array}$$

Ts: $C\hat{O}D\cong\frac{1}{2}A\hat{O}B$

Dimostrazione:

Siccome C è un punto esterno alla circonferenza e CA e CT sono i due segmenti di tangente uscenti da esso, per il teorema delle tangenti: $A\hat{O}C\cong C\hat{O}T$.
Analogamente, D è un punto esterno alla circonferenza e DT e DB sono i due segmenti di tangente uscenti da esso, perciò per il teorema delle tangenti: $T\hat{O}D\cong D\hat{O}B$
Possiamo quindi concludere:

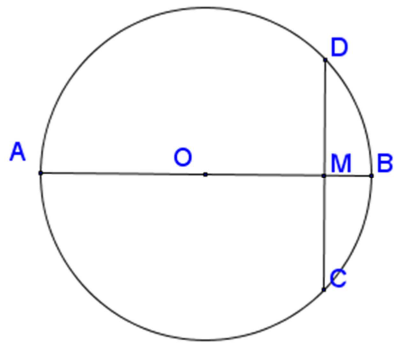
$$A\hat{O}B\cong A\hat{O}T+T\hat{O}B\cong 2\,C\hat{O}T+2\,T\hat{O}D=2\,C\hat{O}D$$

c.v.d.

10. In una circonferenza di diametro AB = 30 cm, è data una corda CD perpendicolare nel punto M al diametro AB. Sapendo che $\frac{3}{4}AM + \frac{1}{3}MB = 20\ cm$, determina l'area del quadrilatero ACBD. (Poni $\overline{AM} = x$)

Posto $\overline{AM} = x$, $\overline{MB} = 30 - x$, perciò:

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{3}(30 - x) = 20$$
$$\frac{3}{4}x - \frac{1}{3}x = 20 - 10$$
$$\frac{5}{12}x = 10 \qquad x = 24$$



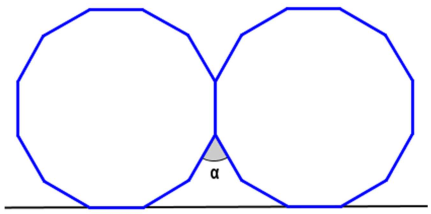
Perciò: $\overline{AM} = 24\ cm.$
Possiamo quindi determinare la lunghezza della corda DC. Possiamo determinare la lunghezza di DM, considerando il triangolo rettangolo OMD, che ha per ipotenusa il raggio della circonferenza:

$$\overline{DM} = \sqrt{\overline{OD}^2 - \overline{OM}^2} = \sqrt{\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 - \left(\overline{AM} - \frac{\overline{AB}}{2}\right)^2} = 12\ cm$$

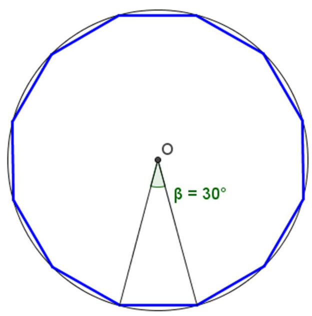
Il segmento DM è metà della corda DC, in quanto AB è perpendicolare alla corda CD e passante per il centro della circonferenza.
Posso quindi determinare l'area del quadrilatero ACBD facendo il semiprodotto delle sue diagonali:

$$A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{2} = \mathbf{360\ cm^2}$$

11. Una moneta da 50 centesimi australiani ha dodici lati di uguale lunghezza. Due monete sono in equilibrio come indicato nell'immagine a lato, sono appoggiate su un tavolo per un lato e hanno un lato in comune. Qual è l'ampiezza dell'angolo α indicato nell'immagine a lato?



Dobbiamo innanzi tutto determinare l'ampiezza degli angoli interni di un dodecagono regolare. Consideriamo la circonferenza circoscritta al poligono di centro O. Se prendiamo uno dei dodici triangoli congruenti in cui possiamo dividere il poligono, sappiamo che tali triangoli sono isosceli, visto che hanno per lato obliquo il raggio e per base il lato del dodecagono. Essendo congruenti, possiamo determinare l'ampiezza dell'angolo al vertice, equivalente a 360°/12, ovvero a 30°.
Gli angoli alla base del triangolo, considerato che la somma degli angoli interni di un triangolo è di 180°, saranno di 75°. In un dodecagono regolare, gli angoli interni sono dati dalla somma di due angoli alla base dei triangoli dati, perciò gli angoli interni di un dodecagono regolare valgono 150°.
Nel disegno dato nel quesito, ci sono tre angoli adiacenti: due angoli interni del dodecagono e l'angolo α, ovvero vale la relazione:



$$150° + 150° + \alpha = 360° \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \mathbf{60°}$$