Verifica le seguenti identità:

1. $\tan\alpha + \sin\alpha - 2\tan\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2} = 2\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin 2\alpha$

$$\tan\alpha + \sin\alpha - 2\tan\alpha\frac{1+\cos\alpha}{2} = 2\sin\alpha\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) - 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\tan\alpha + \sin\alpha - \tan\alpha - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin\alpha - \sin\alpha = 0 \qquad 0 = 0 \qquad verificata$$

2. $\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)+\cot\frac{\alpha}{2}} = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$

$$\frac{1}{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}} = \sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right) \qquad \frac{1}{\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}} = \sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\frac{1}{\frac{\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}} = \sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right) \qquad \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}} = \sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}} = 1 \qquad 1 = 1 \qquad verificata$$

3. $2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2} = 1 - \cos\alpha\cos\beta - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \beta\right)$

$$2\cdot\frac{1-\cos(\alpha+\beta)}{2} = 1 - \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\ (-\sin\beta)$$

$$1 - \cos(\alpha+\beta) = 1 - \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \qquad -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \qquad verificata$$

4. $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2} + \frac{2\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\frac{2\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{2\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}{1 + \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \qquad \sin\alpha + \cos\alpha = \frac{2\,(\sin\alpha + \cos\alpha)}{1+\cos\alpha+1-\cos\alpha}$$

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{2\,(\sin\alpha + \cos\alpha)}{2} \qquad \sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \cos\alpha \qquad verificata$$

5. $\frac{\cot\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}{1+\cos\alpha} - 2\frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\sin\alpha} + 1$

$$\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} - 2\frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha} + 1$$

$$\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\alpha}{2} - \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha} + 1$$

$$1 + \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha} + 1 \qquad 0 = 0 \qquad verificata$$

6. $\sin^4\frac{\alpha}{4} - \frac{3+\cos\alpha}{8} = -\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

$$\left(\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{2}\right)^2 - \frac{3+2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}{8} = -\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \qquad \frac{1-2\cos\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4} - \frac{1+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4} = -\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{1-2\cos\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}-1-\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4} = -\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \qquad -\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \qquad verificata$$

Calcola il valore delle seguenti espressioni:

7. $\sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{3}{8}\pi + \sin\frac{5}{8}\pi - \sin\frac{7}{8}\pi$

$$= \sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{3}{8}\pi + \sin\left(\pi - \frac{3}{8}\pi\right) - \sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{3}{8}\pi + \sin\frac{3}{8}\pi - \sin\frac{\pi}{8} = \mathbf{0}$$

8. $\sin 31° + \sin 29° - \sin 89°$

Applico le formule di prostaferesi al primo e all'ultimo termine:

$$-2\cos 60°\sin 29° + \sin 29° = \sin 29°\,(-2\cos 60° + 1) = \sin 29°\left(-2\cdot\frac{1}{2}+1\right) = \mathbf{0}$$

9. $(1+\cos\alpha)\left(1+\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)$

$$(1+\cos\alpha)\left(1+\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right) = (1+\cos\alpha)\frac{1+\cos\alpha+1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \mathbf{2}$$

10. Dimostra che se in un triangolo ABC l'angolo $\hat{B} = 2\hat{A}$, allora: $\frac{\sin\hat{C}}{\sin\hat{A}+\sin\hat{B}} = 2\cos\hat{A} - 1$

Trattandosi degli angoli di un triangolo e visto che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°, l'angolo $\hat{C}$ è dato da: $\hat{C} = \pi - \hat{A} - \hat{B}$.

Perciò:

$$\frac{\sin(\pi-\hat{A}-\hat{B})}{\sin\hat{A}+\sin 2\hat{A}} = 2\cos\hat{A}-1 \qquad \frac{\sin(\hat{A}+\hat{B})}{\sin\hat{A}+2\sin\hat{A}\cos\hat{A}} = 2\cos\hat{A}-1$$

$$\frac{\sin\hat{A}\cos\hat{B}+\cos\hat{A}\sin\hat{B}}{\sin\hat{A}\,(1+2\cos\hat{A})} = 2\cos\hat{A}-1 \qquad \frac{\sin\hat{A}\,(2\cos^2\hat{A}-1)+\cos\hat{A}\cdot 2\sin\hat{A}\cos\hat{A}}{\sin\hat{A}\;(1+2\cos\hat{A})} = 2\cos\hat{A}-1$$

$$\sin\hat{A}\frac{2\cos^2\hat{A}-1+2\cos^2\hat{A}}{\sin\hat{A}\;(1+2\cos\hat{A})} = 2\cos\hat{A}-1 \qquad \frac{(2\cos\hat{A}-1)(2\cos\hat{A}+1)}{1+2\cos\hat{A}} = 2\cos\hat{A}-1$$

$$2\cos\hat{A}-1 = 2\cos\hat{A}-1 \qquad verificata$$

11. Calcola, mostrando i passaggi, il valore di $\sin^2 35° + \sin^2 55°$.

Dato che gli angoli di $35°$ e $55°$ sono complementari, $55° = 90° - 35°$, ovvero:

$$\sin^2 35° + \sin^2(90°-35°) = \sin^2 35° + \cos^2 35° = \mathbf{1}$$

12. Dimostra che: $arc\tan x + arc\tan y = arc\tan\frac{x+y}{1-xy}$.

Sia $\alpha = arc\tan x$, ovvero $x = \tan\alpha$ e $\beta = arc\tan y$, ovvero $y = \tan\beta$. L'espressione diventa quindi:

$$\alpha+\beta = arc\tan\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \qquad \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

L'ultima uguaglianza corrisponde alla formula di addizione per la tangente, perciò l'uguaglianza è verificata.

Svolgi, a tua scelta, uno dei seguenti problemi:

A. Sia x un numero reale tale che $\sec x - \tan x = 2$. Quanto vale $\sec x + \tan x$?

$\sec x - \tan x = 2$ moltiplico e divido questa espressione per $\sec x + \tan x$:

$$\frac{\sec^2 x - \tan^2 x}{\sec x + \tan x} = 2 \qquad \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\sec x + \tan x} = 2 \qquad \frac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x} = 2\,(\sec x + \tan x) \qquad \sec x + \tan x = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

B. Sapendo che nel decagono regolare il lato è la sezione aurea del raggio della circonferenza circoscritta, ovvero $l = \frac{\sqrt{5}-1}{2}r$, determina:

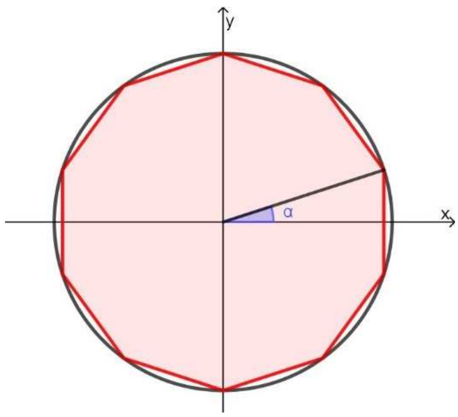
i. l'ampiezza dell'angolo α (vedi figura seguente)
ii. $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$
iii. $\cos\frac{2}{15}\pi$

Trattandosi di un decagono regolare, posso determinare l'ampiezza degli angoli interni, che sono tutti congruenti:

$$\frac{10\cdot\pi - 2\pi}{10} = \frac{4}{5}\pi$$

Considerando il triangolo che ritroviamo nella figura, rettangolo e con un angolo acuto α, sappiamo che l'altro angolo acuto è la metà dell'angolo interno del decagono, ovvero $\frac{2}{5}\pi$ e dato che questo angolo e l'angolo α sono complementari:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{5}\pi = \boldsymbol{\frac{\pi}{10}}$$



Per determinare $\sin\alpha$, posso notare dall'immagine che è congruente a metà del lato del decagono, ovvero:

$$\sin\alpha = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

Applicando la prima relazione fondamentale: $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}$

Per determinare $\cos\frac{2}{15}\pi$, osservo che: $\frac{2}{15}\pi = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{3} - 2\cdot\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{3} - 2\alpha$

Dato che ho tutti gli elementi, applicando le formule goniometriche, posso calcolarlo:

$$\cos\left(\frac{2}{15}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos 2\alpha + \sin\frac{\pi}{3}\sin 2\alpha = \frac{1}{2}(2\cos^2\alpha - 1) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\frac{10+2\sqrt{5}}{4} - 1\right) + \sqrt{3}\frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{16}\cdot\sqrt{(6-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{3+\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{16}\cdot\sqrt{40-8\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{6+2\sqrt{5}+\sqrt{30-6\sqrt{5}}}{8}}$$