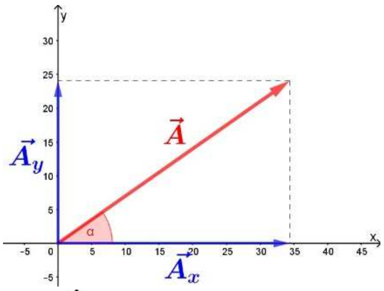
1. Dopo averlo rappresentato graficamente, determina le componenti cartesiane del vettore $\vec{A}$ di modulo $42{,}0\ N$, che formi un angolo di $35{,}0°$:
   A. con la direzione positiva dell'asse x, in verso antiorario
   B. con la direzione positiva dell'asse x, in verso orario
   C. con la direzione positiva dell'asse y, in verso antiorario

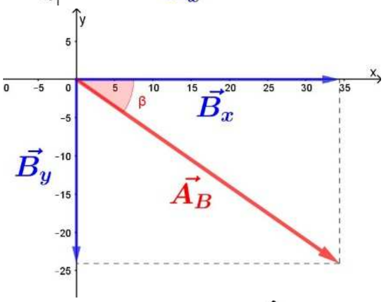
$$A = 42{,}0\ N \qquad \alpha = 35{,}0° \qquad \beta = 35{,}0° \qquad \gamma = 35{,}0°$$

A.



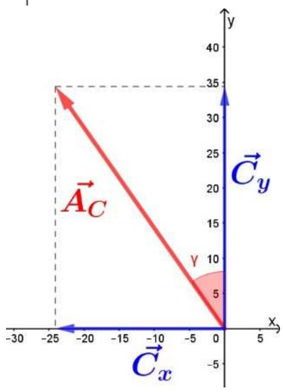
$$A_x = A\cos\alpha = 34{,}4\ N$$
$$A_y = A\sin\alpha = 24{,}1\ N$$
$$\vec{A} = (34,4\ N)\ \hat{x} + (24,1\ N)\ \hat{y}$$

B.



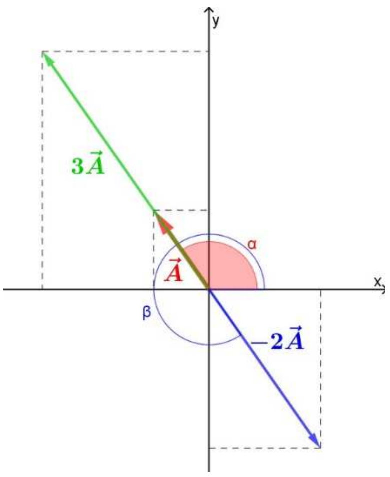
$$B_x = A\cos\beta = 34{,}4\ N$$
$$B_y = A\sin\beta = 24{,}1\ N$$
$$\vec{A}_B = (34,4\ N)\ \hat{x} - (24,1\ N)\ \hat{y}$$

C.



$$C_x = A\ \sin\gamma = 24{,}1\ N$$
$$C_y = A\ \cos\gamma = 34{,}4\ N$$
$$\vec{A}_c = -(24,1\ N)\ \hat{x} + (34,4\ N)\ \hat{y}$$

2. Sia dato il vettore $\vec{A}$ di modulo A, che forma un angolo di $125°$ con la direzione positiva dell'asse x, in verso orario.
   A. Determina, in funzione del modulo A, le componenti cartesiane dei vettori: $\vec{A}$, $3\vec{A}$, $-2\vec{A}$.
   B. Determina il modulo e l'angolo che i vettori $3\vec{A}$ e $-2\vec{A}$ formano con la direzione positiva dell'asse x, aiutandoti con la rappresentazione grafica.



A. Determino le componenti cartesiane di $\vec{A}$, conoscendo il modulo e l'angolo:

$$\vec{A} = (A\cos\alpha)\ \hat{x} + (A\sin\alpha)\ \hat{y} = -0,6\ A\ \hat{x} + 0,8\ A\ \hat{y}$$

Ricavo le componenti degli altri vettori, eseguendo la moltiplicazione per uno scalare:

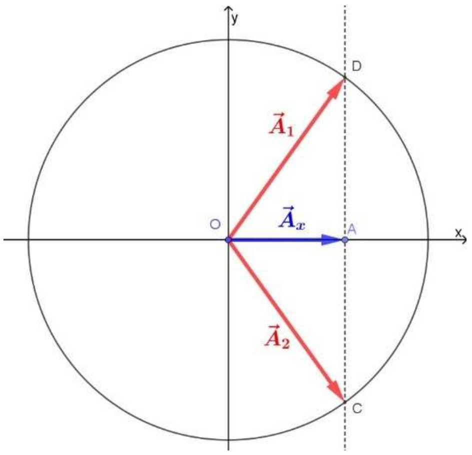
$$3\vec{A} = -1,8\ A\ \hat{x} + 2,4\ A\ \hat{y} \qquad -2\vec{A} = 1,2\ A\ \hat{x} - 1,6\ A\ \hat{y}$$

B. Il modulo dei singoli vettori, considerato il prodotto per uno scalare, è dato da:

$$|\vec{A}| = A \qquad |3\vec{A}| = 3A \qquad |-2\vec{A}| = 2A$$

L'angolo, come indicato nella rappresentazione grafica, è, per $3\vec{A}$, lo stesso di $\vec{A}$, ovvero $\alpha = 125°$ e per $-2\vec{A}$ pari all'angolo $\alpha + 180° = 305°$.

3. Sono noti il modulo A e la componente orizzontale A_x di un vettore.
   A. Quanti vettori si possono individuare con queste caratteristiche?
   B. Come sono disposti nel piano? Spiega.



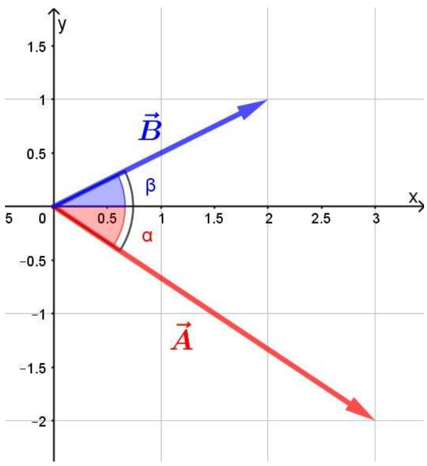
A. Traccio la componente orizzontale $\vec{A}_x$ (ho scelto la componente con lo stesso verso dell'asse x, ma non cambierebbe nulla nella costruzione se il verso fosse opposto). Traccio la circonferenza con centro nell'origine del piano cartesiano e raggio pari al modulo A del vettore. Dalla punta della componente orizzontale, traccio la perpendicolare all'asse x, che interseca la circonferenza nei punti C e D.
   Tracciando il vettore $\overrightarrow{OD}$ (indicato con $\vec{A}_1$ nel disegno) e il vettore $\overrightarrow{OC}$ (indicato con $\vec{A}_2$ nel disegno). I **due vettori** hanno le caratteristiche richieste, ovvero hanno modulo A, in quanto sono raggi della circonferenza rappresentata, e hanno componente orizzontale $\vec{A}_x$.

B. I due vettori sono **simmetrici rispetto all'asse x**. Per come è stata rappresentata, la circonferenza ha diametro coincidente con l'asse x e visto che i due vettori hanno la stessa componente orizzontale (adagiata sul diametro), le punte dei vettori sono simmetriche rispetto al diametro, come si evince dal disegno.

4. Completa la seguente tabella:

$\vec{A}$	$4\hat{x}+\hat{y}$	$\mathbf{-6\hat{x}}$	$-2\hat{x}+\hat{y}$	$\mathbf{3\hat{x}}$	$\mathbf{-6\hat{x}}$
$\vec{B}$	$-2\hat{x}+\hat{y}$	$4\hat{x}+\hat{y}$	$\mathbf{-6\hat{x}}$	$-2\hat{x}+\hat{y}$	$-2\hat{x}+\hat{y}$
$\vec{A}+\vec{B}$	$\mathbf{2\hat{x}+2\hat{y}}$	$-2\hat{x}+\hat{y}$	$\mathbf{-8\hat{x}+\hat{y}}$	$\mathbf{\hat{x}+\hat{y}}$	$\mathbf{-8\hat{x}+\hat{y}}$
$\vec{A}-\vec{B}$	$\mathbf{6\hat{x}}$	$\mathbf{-10\hat{x}-\hat{y}}$	$4\hat{x}+\hat{y}$	$\mathbf{5\hat{x}-\hat{y}}$	$\mathbf{-4\hat{x}-\hat{y}}$
$\vec{B}-\vec{A}$	$\mathbf{-6\hat{x}}$	$\mathbf{10\hat{x}+\hat{y}}$	$\mathbf{-4\hat{x}-\hat{y}}$	$\mathbf{-5\hat{x}+\hat{y}}$	$4\hat{x}+\hat{y}$
$2\vec{A}+\vec{B}$	$\mathbf{6\hat{x}+3\hat{y}}$	$\mathbf{-8\hat{x}+\hat{y}}$	$\mathbf{-10\hat{x}+2\hat{y}}$	$4\hat{x}+\hat{y}$	$\mathbf{-14\hat{x}+\hat{y}}$

5. Calcola l'ampiezza dell'angolo tra i vettori: $\vec{A}=3\hat{x}-2\hat{y}$ e $\vec{B}=2\hat{x}+\hat{y}$.



Rappresentati i vettori dati, è facile vedere che l'angolo formato dai due vettori è dato dalla somma degli angoli che i due vettori formano con la direzione positiva dell'asse x. Procediamo, quindi, a determinare i singoli angoli:

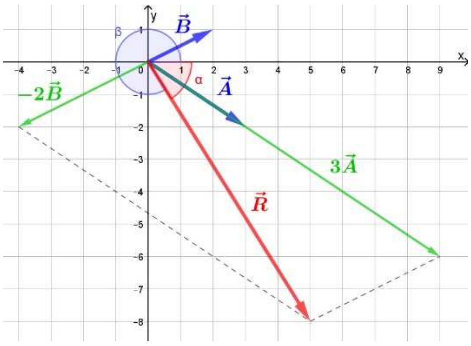
$$|A_y| = A_x \tan\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \text{atan}\frac{|A_y|}{A_x} = \text{atan}\frac{2}{3}$$

$$B_y = B_x \tan\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \text{atan}\frac{B_y}{B_x} = \text{atan}\frac{1}{2}$$

Posso determinare l'ampiezza dell'angolo richiesto:

$$\alpha+\beta = \text{atan}\frac{2}{3} + \text{atan}\frac{1}{2} = \mathbf{60°}$$

6. Sapendo che il vettore $\vec{R}$ è dato dalla differenza tra il triplo del vettore $\vec{A} = 3\hat{x} - 2\hat{y}$ e il doppio del vettore $\vec{B} = 2\hat{x} + \hat{y}$, determina le componenti cartesiane del vettore $\vec{R}$, il suo modulo e l'angolo che esso forma con la direzione positiva dell'asse x.



$\vec{R}$ è dato dalla differenza tra il triplo del vettore $\vec{A} = 3\hat{x} - 2\hat{y}$ e il doppio del vettore $\vec{B} = 2\hat{x} + \hat{y}$, ovvero:

$$\vec{R} = 3\vec{A} - 2\vec{B} = 3(3\hat{x} - 2\hat{y}) - 2(2\hat{x} + \hat{y}) = 9\hat{x} - 6\hat{y} - 4\hat{x} - 2\hat{y} = 5\hat{x} - 8\hat{y}$$

Per determinare il modulo del vettore risultante, applico il teorema di Pitagora:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \mathbf{9,4}$$

Determino l'angolo formato con la direzione positiva dell'asse x:

$$|R_y| = R_x \tan\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \operatorname{atan}\frac{|R_y|}{R_x} = \operatorname{atan}\frac{8}{5}$$

L'angolo preso in senso antiorario è l'esplementare di quello appena calcolato, ovvero:

$$\beta = 360° - \alpha = \mathbf{302°}$$

7. Un astronauta utilizza una comune bilancia per pesarsi sulla Terra e sulla Luna. Sulla Terra la bilancia indica il valore 80 kg; la costante di gravità sulla Luna è $1{,}62\ N/kg$. Dopo aver spiegato il funzionamento della bilancia pesapersone, stabilisce quale valore indica la bilancia sulla Luna.

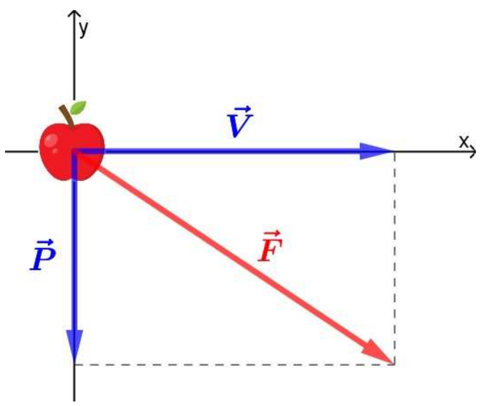
$$m_T = 80\ kg \qquad g = 9{,}81\ N/kg \qquad g_L = 1{,}62\ N/kg \qquad m_L?$$

Sappiamo che la massa è sempre la stessa, ma in questo caso si fa riferimento a una situazione particolare.

All'intero della bilancia pesapersone, vi è una molla collegata alla pedana: la molla, comprimendosi, misura il peso, ovvero la forza con la quale la persona è attirata dalla forza di gravità verso il centro della Terra e, dividendo il risultato per la costante di gravità, si ottiene la massa. Per misurare correttamente la propria massa sulla Luna, la bilancia dovrebbe essere tarata in modo tale da dividere la forza di gravità per la costante di gravità della Luna. In questo caso, la bilancia che viene usata sulla Luna è tarata per la Terra e, quindi, misura il peso sulla Luna e lo divide per la costante di gravità della Luna, restituendo un valore distorto della massa. Ricordando che il peso sulla Luna è dato da: $P_L = m_T g_L$, la massa sarà data da:

$$m_L = \frac{P_L}{g} = \frac{m_T g_L}{g} = \mathbf{13\ kg}$$

8. Una mela di 320 g è su un ramo. Un colpo di vento applica alla mela una forza orizzontale di 12,0 N e la fa staccare dal ramo. Calcola il modulo della forza totale sulla mela nel momento in cui si stacca dal ramo.



$$m = 320\ g = 0{,}320\ kg \qquad g = 9{,}81\ N/kg \qquad V = 12{,}0\ N \qquad F?$$

Sulla mela, nel momento in cui si stacca dal ramo, agiscono due forze: la forza peso, diretta verso il basso e quindi perpendicolare al terreno, e la forza del vento, parallela al terreno. Le due forze, come indicato nella figura, sono tra loro perpendicolari e la loro risultante F può essere determinata applicando il teorema di Pitagora:

$$P = mg$$

$$F = \sqrt{P^2 + V^2} = \sqrt{(mg)^2 + V^2} = \mathbf{12,4\ N}$$