1. Una superficie equipotenziale che circonda una carica puntiforme q ha un potenziale di $490\ V$ e un'area di $1{,}1\ m^2$. Determina q.

$$V = 490\ V \qquad S = 1{,}1\ m^2 \qquad q?$$

La superficie equipotenziale di una carica puntiforme è una sfera con centro nella carica, perciò $S = 4\pi r^2$. Inoltre, il potenziale di una carica puntiforme, a una distanza r dalla carica, è dato da: $V = k\frac{q}{r}$.

$$S = 4\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}} \qquad \Rightarrow \qquad V = k\frac{q}{r} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{rV}{k} = \frac{V}{2k}\sqrt{\frac{S}{\pi}} = \mathbf{1{,}6 \cdot 10^{-8}\ C}$$

2. La stessa differenza di potenziale è applicata tra le armature di due differenti condensatori. Il condensatore A immagazzina $11\ \mu C$ di carica e $8{,}0 \cdot 10^{-5}\ J$ di energia. Il condensatore B, che ha una capacità di $6{,}7\ \mu F$, immagazzina la carica q_B. Determina q_B.

$$q_A = 11\ \mu C \qquad U_A = 8{,}0 \cdot 10^{-5}\ J \qquad C_B = 6{,}7\ \mu F \qquad V_A = V_B \qquad q_B?$$

La capacità di un condensatore è data dal rapporto tra carica presente sulle armature e differenza di potenziale tra le stesse:

$$C_B = \frac{q_B}{V_B} \quad \Rightarrow \quad q_B = C_B V_B$$

L'energia immagazzinata da un condensatore è data da: $U_A = \frac{1}{2}q_A V_A \quad \Rightarrow \quad V_A = \frac{2U_A}{q_A}$

Dato che $V_A = V_B$, posso determinare la carica richiesta: $q_B = C_B V_B = C_B V_A = C_B \cdot \frac{2U_A}{q_A} = \mathbf{9{,}7 \cdot 10^{-5}\ C}$

3. Due condensatori sono uguali, eccetto che in uno è inserito un dielettrico ($\varepsilon_r = 4{,}50$). Il condensatore vuoto è connesso a una batteria da $12\ V$. Quale deve essere la differenza di potenziale fra le armature del condensatore con il dielettrico perché immagazzini la stessa energia elettrica dell'altro?

$$\varepsilon_r = 4{,}50 \qquad V_o = 12\ V \qquad U_o = U \qquad V?$$

Esprimo l'energia immagazzinata dal condensatore in funzione della capacità e della differenza di potenziale tra le armature, ricordando che, per definizione, la capacità è data dal rapporto tra carica e differenza di potenziale:

$$U = \frac{1}{2}qV = \frac{1}{2}(CV)V = \frac{1}{2}CV^2$$

Dato che la capacità di un condensatore nel quale è stato inserito un materiale dielettrico è data da: $C = C_o\varepsilon_r$, dove C_o è la capacità del condensatore nel quale non è stato inserito il dielettrico:

$$U_o = U \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}C_o V_o^2 = \frac{1}{2}CV^2 \quad \Rightarrow \quad C_o V_o^2 = \varepsilon_r C_o V^2 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{V_o}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \mathbf{5{,}7\ V}$$

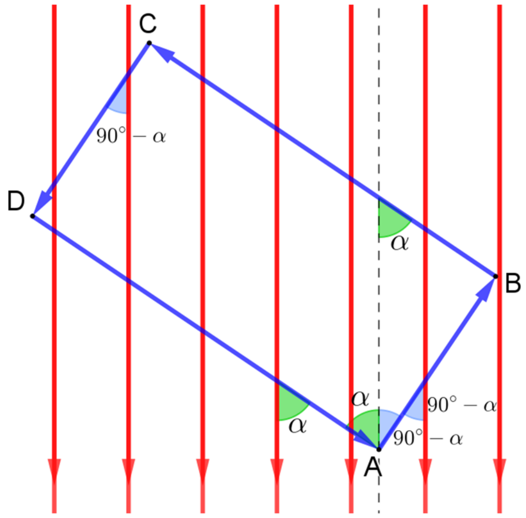
4. Due cariche, di $6{,}0\ nC$ e $-6{,}0\ nC$, sono fissate in due punti A e B rispettivamente che distano tra loro $1{,}0\ m$. Una terza carica di $4{,}0\ nC$ si trova nel punto C, allineato con A e con B, $30\ cm$ a destra di B. Il punto D, allineato con A, B e C, si trova $20\ cm$ a destra di C. Calcola il lavoro compiuto sulla carica q_3 quando si sposta da C a D.

$$q_A = 6{,}0\ nC \qquad q_B = -6{,}0\ nC \qquad x_A = 0\ m \qquad x_B = 1{,}0\ m \qquad q_C = 4{,}0\ nC \qquad x_C = 1{,}3\ m \qquad x_D = 1{,}5\ m \qquad L_{CD}?$$

Per calcolare il lavoro, determino la differenza di energia potenziale tra le due situazioni: faccio la differenza tra le energie potenziali quando la carica q_3 è posta in C e quando la carica è posta in D:

$$L = -\Delta U = U_{CA} + U_{CB} - (U_{DA} + U_{DB}) = k\frac{q_A q_C}{x_C} + k\frac{q_B q_C}{x_C - x_B} - \left(k\frac{q_C q_A}{x_D} + k\frac{q_C q_B}{x_D - x_B}\right) = \mathbf{-2{,}7 \cdot 10^{-7}\ J}$$

5. Mediante calcolo esplicito, verifica che è nulla la circuitazione di un campo elettrico uniforme $\vec{E}$ lungo un qualunque percorso rettangolare.



Posso procedere in due modi, applicando la definizione di circuitazione:

$$\Gamma_{ABCD}(\vec{E}) = \vec{E}\cdot\overrightarrow{AB} + \vec{E}\cdot\overrightarrow{BC} + \vec{E}\cdot\overrightarrow{CD} + \vec{E}\cdot\overrightarrow{DA} =$$
$$= \vec{E}\cdot\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}\right) = \vec{E}\cdot\vec{0} = 0$$

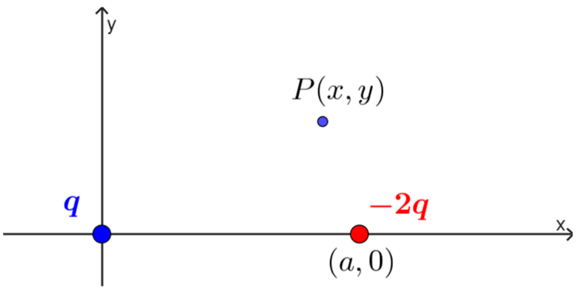
Oppure, bisogna fare una serie di considerazioni geometriche per i lati del rettangolo ABCD: i lati AD e BC, paralleli tra loro, formano un angolo di ampiezza α con la direzione del campo elettrico. I lati AB e CD, invece, formano un angolo pari a $90° - \alpha$, come si può facilmente notare tracciando in uno dei vertici una parallela alla direzione del campo elettrico. Perciò:

$$\vec{E}\cdot\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\cdot E\cdot\cos\left(180° - (90° - \alpha)\right) = -\overline{AB}\cdot E\cdot\sin\alpha$$
$$\vec{E}\cdot\overrightarrow{CD} = \overline{CD}\cdot E\cdot\cos(90° - \alpha) = \overline{AB}\cdot E\cdot\sin\alpha$$
$$\vec{E}\cdot\overrightarrow{BC} = \overline{BC}\cdot E\cdot\cos(180° - \alpha) = -\overline{BC}\cdot E\cdot\cos\alpha$$
$$\vec{E}\cdot\overrightarrow{DA} = \overline{DA}\cdot E\cdot\cos\alpha = \overline{BC}\cdot E\cdot\cos\alpha$$

Sommando:

$$\Gamma_{ABCD}(\vec{E}) = \vec{E}\cdot\overrightarrow{AB} + \vec{E}\cdot\overrightarrow{BC} + \vec{E}\cdot\overrightarrow{CD} + \vec{E}\cdot\overrightarrow{DA} = -\overline{AB}\cdot E\cdot\sin\alpha - \overline{BC}\cdot E\cdot\cos\alpha + \overline{AB}\cdot E\cdot\sin\alpha + \overline{BC}\cdot E\cdot\cos\alpha = 0$$

6. Due cariche puntiformi q e $-2q$ in un riferimento cartesiano xy si trovano una nell'origine e l'altra sull'asse x a una distanza a dall'origine.
   A. Scrivi le equazioni delle linee equipotenziali nel piano xy in funzione del potenziale V.
   B. Determina il luogo geometrico dei punti del piano per cui il potenziale è nullo.



A. Per determinare le equazioni delle linee equipotenziali nel piano xy, sommo il potenziale in P dovuto a ogni singola carica puntiforme:

$$V(x,y) = k\frac{q}{\overline{PO}} + k\frac{-2q}{\overline{PA}} = \boldsymbol{kq\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{2}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}\right)}$$

B. Pongo il potenziale determinato al punto precedente uguale a zero:

$$kq\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{2}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}\right) = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{(x-a)^2+y^2} = 2\sqrt{x^2+y^2} \quad\Rightarrow\quad x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = 4x^2 + 4y^2$$

$$3x^2 + 3y^2 + 2ax - a^2 = 0 \qquad \boldsymbol{x^2 + y^2 + \frac{2}{3}ax - \frac{1}{3}a^2 = 0}$$

Quella determinata è l'equazione di una **circonferenza** di centro $\left(-\frac{a}{3}; 0\right)$ e raggio $r = \frac{2}{3}a$.

7. Due sfere conduttrici, molto distanti l'una dall'altra, hanno raggio di $6{,}5\ cm$ e $11\ cm$ e si trovano rispettivamente al potenziale di $1200\ V$ e $3500\ V$. Le due sfere vengono collegate tramite un sottile filo conduttore, dopo di che vengono scollegate. Quali sono i potenziali finali delle due sfere?

$$R_1 = 6{,}5\ cm \qquad R_2 = 11\ cm \qquad V_1 = 1200\ V \qquad V_2 = 3500\ V \qquad V_1'? \qquad V_2'?$$

Determino la carica su ogni sfera in funzione del potenziale: $V = k\dfrac{q}{R} \quad \Rightarrow \quad q = \dfrac{VR}{k}$

Nel momento in cui vengono collegate, le due sfere si ritrovano in equilibrio elettrostatico, perciò, indicate con Q_1 e Q_2 le cariche finali:

$$V_1' = V_2' \quad \Rightarrow \quad k\frac{Q_1}{R_1} = k\frac{Q_2}{R_2} \quad \Rightarrow \quad Q_1 = \frac{R_1}{R_2}Q_2$$

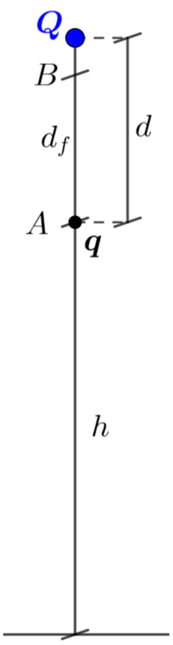
Per la conservazione della carica, indicate con q_1 e q_2 le cariche iniziali:

$$q_1 + q_2 = Q_1 + Q_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1R_1}{k} + \frac{V_2R_2}{k} = \frac{R_1}{R_2}Q_2 + Q_2 \quad \Rightarrow \quad Q_2\frac{R_1 + R_2}{R_2} = \frac{V_1R_1 + V_2R_2}{k}$$

$$Q_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{V_1R_1 + V_2R_2}{k}$$

A questo punto, posso determinare il potenziale richiesto: $V_1' = V_2' = k\dfrac{Q_2}{R_2} = \dfrac{V_1R_1 + V_2R_2}{R_1 + R_2} = \mathbf{2{,}6 \cdot 10^3\ V}$

8. Una particella con carica $1{,}38 \cdot 10^{-17}\ C$ e massa pari a $3{,}69 \cdot 10^{-22}\ kg$ è lanciata verticalmente verso l'alto in direzione di una seconda particella con carica $5{,}43 \cdot 10^{-15}\ C$.
   A. Quest'ultima è fissa e dista inizialmente $62{,}6\ cm$ dall'altra particella. La particella con carica minore si sposta verticalmente di $50{,}0\ cm$ prima di fermarsi e parte da un'altezza di $1{,}400\ m$ misurata dal suolo. Determina il valore della velocità iniziale della particella.
   B. Calcola il rapporto tra la variazione dell'energia potenziale elettrica e la variazione di quella gravitazionale tra le condizioni iniziali e finali del sistema.



$$q = 1{,}38 \cdot 10^{-17}\ C \qquad m = 3{,}69 \cdot 10^{-22}\ kg \qquad Q = 5{,}43 \cdot 10^{-15}\ C$$

$$d = 62{,}6\ cm \qquad d_f = 50{,}0\ cm \qquad h = 1{,}400\ m \qquad v_B = 0\ m/s \qquad v_A? \qquad \frac{\Delta U_e}{\Delta U_g}?$$

A. Applico il principio di conservazione dell'energia, considerando come punto iniziale A e come punto finale B.

$$K_A + U_{e_A} + U_{g_A} = K_B + U_{e_B} + U_{g_B} \quad \Rightarrow \quad K_A + U_{e_A} + U_{g_A} = U_{e_B} + U_{g_B}$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = U_{e_B} + U_{g_B} - U_{e_A} - U_{g_A} \quad \Rightarrow \quad v_A = \sqrt{\frac{2}{m}\left(U_{e_B} + U_{g_B} - U_{e_A} - U_{g_A}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{m}\left(k\frac{qQ}{d - d_f} + mg\left(h + d_f\right) - k\frac{qQ}{d} - mgh\right)} = \mathbf{5{,}74\ m/s}$$

B. Procedo con il calcolo del rapporto tra le variazioni di energie potenziali:

$$\frac{\Delta U_e}{\Delta U_g} = \frac{U_{e_A} - U_{e_B}}{U_{g_A} - U_{g_B}} = \frac{kqQ\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d - d_f}\right)}{mgh - mg\left(h + d_f\right)} = \frac{kqQ}{dmg\left(d - d_f\right)} = \mathbf{2{,}36}$$