Problema 1

1. Nel piano xOy:
   A. determinare l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$, tangente nell'origine alla retta di equazione $t: 2x+3y=0$, e il cui centro C appartiene alla retta $s: 5x-4y+2=0$;
   B. dato il quadrato OABD inscritto nella circonferenza, individuarne i vertici;
   C. determinare l'equazione dell'ellisse simmetrica rispetto agli assi, passante per i vertici A e D del quadrato e verificare che ha area doppia rispetto a quella della circonferenza $\mathcal{C}$;
   D. determinare l'area della superficie individuata dalla sovrapposizione della circonferenza e dell'ellisse.

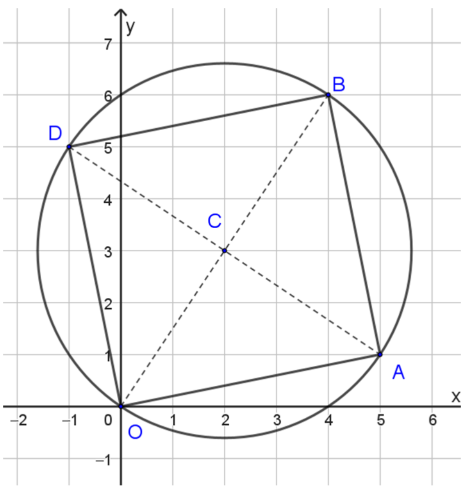
A. Dato che il raggio tracciato per il punto di tangenza è perpendicolare alla tangente, determino l'equazione della retta perpendicolare alla tangente t, passante per il punto di tangenza (cioè l'origine) e la metto a sistema con la retta s per determinare le coordinate del centro C:

$$m_t=-\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad m_r=\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad r: y=\frac{3}{2}x$$

$$\begin{cases} 5x-4y+2=0 \\ y=\frac{3}{2}x \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x-6x+2=0 \\ y=\frac{3}{2}x \end{cases} \qquad C(2;3)$$

A questo punto, posso determinare l'equazione della circonferenza, sapendo che passa per l'origine e che, quindi, nell'equazione ha il termine noto nullo:

$$(x-2)^2+(y-3)^2=r^2 \qquad \boldsymbol{x^2+y^2-4x-6y=0}$$



B. Il quadrato inscritto nella circonferenza ha il punto di incontro delle diagonali coincidente con il centro C della circonferenza. Le due diagonali, inoltre, sono perpendicolari. Perciò uso il coefficiente angolare della retta r, la retta cui appartiene OC, e determino la perpendicolare a OC passante per C:

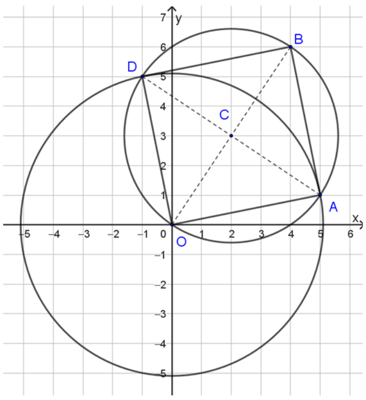
$$m_r=\frac{3}{2} \qquad y-3=-\frac{2}{3}(x-2) \qquad y=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{3}$$

Determino l'intersezione tra questa retta e l'equazione della circonferenza, per determinare i vertici A e D:

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-6y=0 \\ y=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{3} \end{cases} \qquad x^2+\frac{4}{9}x^2-\frac{52}{9}x+\frac{169}{9}-4x+4x-26=0$$

$$\frac{13}{9}x^2-\frac{52}{9}x+\frac{169}{9}-26=0$$

$$x^2-4x+13-18=0 \qquad x^2-4x-5=0 \qquad \begin{matrix} x_1=-1 \\ x_2=5 \end{matrix}$$



Le due soluzioni dell'equazione risolvente restituiscono le ascisse di due vertici opposti del quadrato, come si può intuire dalla rappresentazione a lato:

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=5 \end{cases} \quad \boldsymbol{D(-1;5)} \qquad \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases} \quad \boldsymbol{A(5;1)}$$

Posso determinare il vertice B, sapendo che il centro C della circonferenza, in quanto punto di incontro delle diagonali, è il punto medio della diagonale OB, perciò:

$$\begin{cases} \frac{x_O+x_B}{2}=x_C \\ \frac{y_O+y_B}{2}=y_C \end{cases} \qquad \begin{cases} x_B=2x_C-x_O=4 \\ y_B=2y_C-y_O=6 \end{cases} \qquad \boldsymbol{B(4;\ 6)}$$

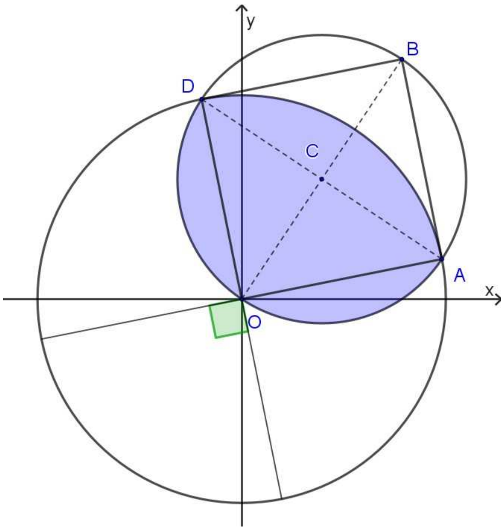
C. L'ellisse simmetrica rispetto agli assi, passante per i vertici A e D del quadrato, non è altro che la circonferenza con centro nell'origine e raggio uguale al lato del quadrato, $\sqrt{26}$, visto che A e D sono equidistanti da O, in quanto lati del quadrato OABD, perciò:

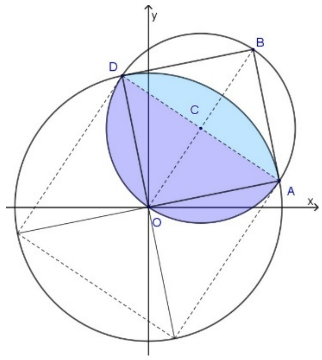
$$\boldsymbol{x^2+y^2=26}$$

È facile verificare che l'area della seconda circonferenza è doppia dell'area della prima, visto che $r_1=r_2\sqrt{2}$:

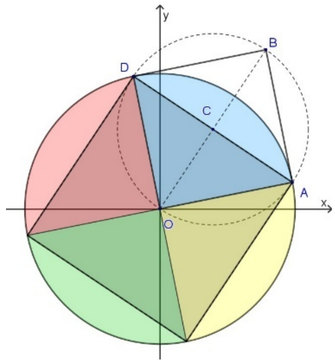
$$\mathcal{A}_{\mathcal{C}_1}=\pi r_1^2=13\pi \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{C}_2}=\pi r_2^2=26\pi \qquad \boldsymbol{\mathcal{A}_{\mathcal{C}_2}=2\,\mathcal{A}_{\mathcal{C}_1}}$$

D. Devo determinare l'area evidenziata, ricordando che, dato che D e A sono vertici di un quadrato, $OA \perp OD$ e, quindi, l'area da determinare è così rappresentabile:





L'area è divisibile in due parti, usando la diagonale AD. La parte scura è metà della circonferenza più piccola.



La parte più chiara è ottenibile dividendo in 4 parti congruenti la circonferenza maggiore e sottraendo l'area del triangolo rettangolo OAD.

Perciò, l'area richiesta è:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\mathcal{C}_1 + \frac{1}{4}\mathcal{C}_2 - \frac{1}{2}\overline{OA} \cdot \overline{OD} = \frac{1}{2} \cdot 13\pi + \frac{1}{4} \cdot 26\pi - \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{26}\right)^2 = \mathbf{13\pi - \frac{13}{2}}$$

Problema 2

2. Nel piano xOy:

A. determinare l'equazione della parabola che ha apertura minore, con asse parallelo all'asse x che passa per $A(-3;1)$, $B(1;\ -3)$ e ha vertice di ascissa $-\frac{7}{2}$;

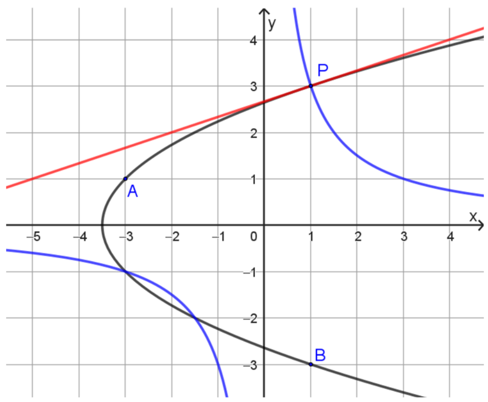
B. essendo t la tangente alla parabola nel suo punto P di ascissa 1 e ordinata positiva, determinare l'equazione dell'iperbole avente per asintoti gli assi cartesiani e passante per P, verificando che la sua tangente in tale punto è perpendicolare a t;

C. essendo Q e R gli ulteriori punti d'intersezione tra la parabola e l'iperbole, con Q punto di ascissa minore, determinare l'area del trapezio PSQR inscritto nella parabola, dopo aver individuato il vertice S.

A. La generica equazione della parabola con asse parallelo all'asse x è: $x = ay^2 + by + c$. Per determinarne i parametri, impongo il passaggio per i punti dati e pongo l'ascissa del vertice generica uguale al valore dato:

$$\begin{matrix} A \\ B \\ x_V \end{matrix} \begin{cases} -3 = a + b + c \\ 1 = 9a - 3b + c \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{7}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 8a - 4b = 4 \\ a + b + c = -3 \\ \Delta = 14a \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 2a - 1 \\ c = -3a - 2 \\ (2a-1)^2 - 4a(-3a-2) = 14a \end{cases}$$

$$4a^2 - 4a + 1 + 12a^2 + 8a - 14a = 0 \qquad 16a^2 - 10a + 1 = 0 \qquad a_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{16} = \left\langle \begin{matrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{8} \end{matrix} \right.$$



Visto il testo del problema, fra i due valori ottenuti scelgo il maggiore, che determina la parabola con apertura minore:

$$\mathcal{P}\!: x = \frac{1}{2}y^2 - \frac{7}{2}$$

B. La parabola ha per asse di simmetria l'asse x, perciò il punto P è il simmetrico del punto B rispetto all'asse x: $P(1,3)$. Determino l'equazione della tangente t usando la formula di sdoppiamento:

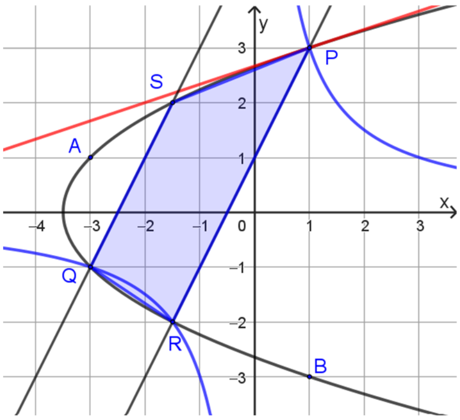
$$\frac{x + x_P}{2} = \frac{1}{2}yy_P - \frac{7}{2} \qquad x + 1 = 3y - 7 \qquad t\!: y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$$

L'iperbole avente per asintoti gli assi cartesiani e passante per P ha equazione: $\boldsymbol{xy = 3}$.

Determino la tangente all'iperbole in P, applicando la formula di sdoppiamento:

$$\frac{xy_P + x_P y}{2} = k \qquad y = -3x + 6$$

Dal coefficiente angolare, posso dedurre che la tangente è realmente perpendicolare a t.



C. Determino innanzi tutto le coordinate dei punti Q ed R di intersezione tra parabola e iperbole:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}y^2 - \frac{7}{2} \\ x = \frac{3}{y} \end{cases} \qquad y^3 - 7y - 6 = 0$$

Devo applicare l'algoritmo di Ruffini, ma so già che una delle soluzioni è l'ordinata di P, vale a dire: $y = 3$.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -7 & -6 \\ 3 & & 3 & 9 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & // \end{array} \qquad \begin{gathered}(y-3)(y^2+3y+2) = 0 \\ (y-3)(y+2)(y+1) = 0\end{gathered}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = -2 \end{cases} \quad \boldsymbol{R\left(-\frac{3}{2}; -2\right)} \qquad \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases} \quad \boldsymbol{Q(-3; -1)}$$

Dal grafico posso dedurre che le due basi del trapezio saranno RP e QS (non ci sono altre alternative), perciò determino il coefficiente angolare della retta passante per P e per R, determino la retta r parallela a PR passante per Q e determino le coordinate dell'intersezione S della retta con la parabola:

$$m_{PR} = \frac{3+2}{1+\frac{3}{2}} = 2 \qquad r: y + 1 = 2(x+3) \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{2}y - \frac{5}{2} \\ x = \frac{1}{2}y^2 - \frac{7}{2} \end{cases} \qquad \frac{1}{2}y^2 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}y - \frac{5}{2}$$

$$y^2 - y - 2 = 0 \qquad \begin{matrix} y_1 = -1 \\ y_2 = 2 \end{matrix} \qquad \boldsymbol{S\left(-\frac{3}{2}; 2\right)}$$

Per determinare l'area, ho bisogno di calcolare la lunghezza delle basi e dell'altezza, ovvero della distanza del punto P dalla retta r:

$$\overline{RP} = \sqrt{\left(1+\frac{3}{2}\right)^2 + (3+2)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{5} \qquad \overline{QS} = \sqrt{\left(-3+\frac{3}{2}\right)^2 + (-1-2)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{5} \qquad h = \frac{|2-3+5|}{\sqrt{1+4}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Ora posso determinare l'area:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}\sqrt{5} + \frac{3}{2}\sqrt{5}\right)\cdot\frac{4}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{8}$$

QUESTIONARIO

1. Si sa che in una coltura batterica il numero di batteri presenti triplica ogni due giorni.
   A. Ipotizzando che la crescita abbia un andamento esponenziale del tipo $N = N_o\, e^{kt}$, dove N rappresenta il numero di batteri al tempo t (in giorni), N_o il numero di batteri nell'istante iniziale $t = 0$, k una costante, determina il valore di k.
   B. Sapendo che dopo 3 giorni dall'inizio dell'osservazione il numero di batteri presenti è $3 \cdot 10^5$, determina N_o.
   C. Calcola di quanto è aumentata, in percentuale, la popolazione di batteri dopo 6 ore e dopo 18 ore.

A. Determino il valore della costante k, sapendo che $N = 3N_o$ per $t = 2$:

$$e^{kt} = \frac{N}{N_o} \quad \Rightarrow \quad kt = \ln\frac{N}{N_o} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{t}\ln\frac{N}{N_o} = \frac{1}{2}\ln 3 = \boldsymbol{\ln\sqrt{3}}$$

B. Sostituisco i dati $N = 3\cdot 10^5$ e $t = 3$, per determinare N_o:

$$N_o = \frac{N}{e^{kt}} = \frac{3\cdot 10^5}{e^{3\ln\sqrt{3}}} = \frac{3\cdot 10^5}{\left(e^{\ln\sqrt{3}}\right)^3} = \frac{3\cdot 10^5}{\left(\sqrt{3}\right)^3} = \boldsymbol{\frac{10^5}{\sqrt{3}}}$$

C. Determino la variazione data da: $\frac{N-N_o}{N_o}$, prima con $t=\frac{1}{4}$ e poi con $t=\frac{3}{4}$:

$$\frac{N}{N_o}-1=\frac{N_o e^{\frac{1}{4}k}}{N_o}-1=\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{4}}-1=\mathbf{14,7\%} \qquad \frac{N}{N_o}-1=\frac{N_o e^{\frac{3}{4}k}}{N_o}-1=\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{4}}-1=\mathbf{51\%}$$

2. Determinare il dominio della seguente funzione: $y=\sqrt{2^x+2^{2-x}-5}$.

Il dominio si ottiene ponendo l'argomento della radice quadrata maggiore o uguale a zero:

$$2^x+2^{2-x}-5\geq 0 \quad\Rightarrow\quad 2^x+\frac{4}{2^x}-5\geq 0$$

Pongo $2^x=y$:

$$y+\frac{4}{y}-5\geq 0 \qquad \frac{y^2-5y+4}{y}\geq 0$$

Posso semplificare il denominatore che, essendo 2^x, è sempre positivo:

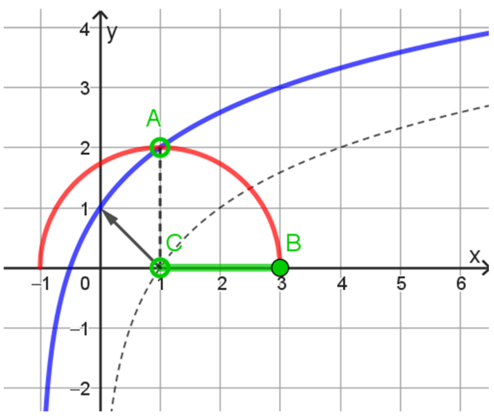
$$y^2-5y+4\geq 0 \qquad y_1=1 \quad y_2=4 \qquad y\leq 1 \ \vee\ y\geq 4$$

$$2^x\leq 1 \ \vee\ 2^x\geq 4 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{x\leq 0} \ \vee\ \boldsymbol{x\geq 2}$$

3. Risolvere la seguente disequazione: $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\log_2(x-1)}\geq 1$.

$$\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}\log_2(x-1)\geq 0\\ \log_{\frac{1}{2}}\log_2(x-1)\geq 1\\ \log_2(x-1)>0\\ x-1>0\end{cases} \qquad \begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}\log_2(x-1)\geq 1\\ x-1>1\\ x-1>0\end{cases} \qquad \begin{cases}\log_2(x-1)\leq\frac{1}{2}\\ x-1>1\end{cases} \qquad \begin{cases}x-1\leq\sqrt{2}\\ x>2\end{cases} \qquad \boldsymbol{2<x\leq 1+\sqrt{2}}$$

4. Risolvere graficamente la disequazione: $\log_2(x+1)>-1+\sqrt{3+2x-x^2}$.



$$\log_2(x+1)+1>\sqrt{3+2x-x^2}$$

Rappresento e confronto tra loro le funzioni:

$$y=\log_2(x+1)+1 \qquad y=\sqrt{3+2x-x^2}$$

La prima è una traslazione di vettore $\vec{v}(-1,1)$ della funzione $y=\log_2 x$, mentre la seconda è un arco di circonferenza:

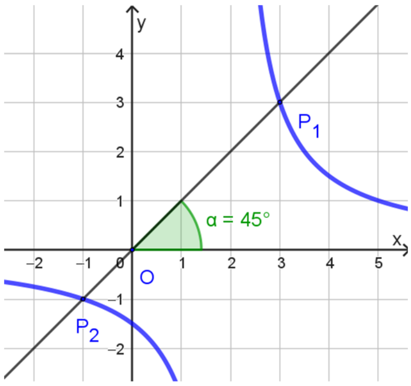
$$\begin{cases}y^2=3+2x-x^2\\ y\geq 0\\ 3+2x-x^2\geq 0\end{cases} \quad \begin{cases}x^2+y^2-2x-3=0\\ y\geq 0\\ -1\leq x\leq 3\end{cases} \qquad C(1,0), \qquad r=2$$

$$\boldsymbol{1<x\leq 3}$$

5. Scritta l'equazione dell'iperbole equilatera traslata avente per asintoti le rette $x=2$ e $y=0$ e passante per il punto $\left(0;\ -\frac{3}{2}\right)$, determinare i punti P della curva tali che la congiungente P con l'origine degli assi formi un angolo di 45° con il semiasse positivo delle ascisse.

L'iperbole equilatera traslata che ha per asintoti le rette date ha generica equazione: $y=\frac{b}{cx-2c}$. Impongo il passaggio per il punto dato per determinare i parametri, sostituendo le coordinate del punto:

$$-\frac{3}{2}=\frac{b}{-2c} \qquad b=3c \qquad y=\frac{3c}{c(x-2)} \qquad \boldsymbol{y=\frac{3}{x-2}}$$



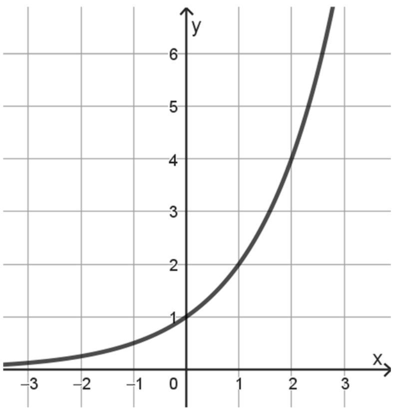
Per determinare i punti richiesti, devo determinare le coordinate dei punti di intersezione tra l'iperbole e la bisettrice di primo e terzo quadrante, che forma con la direzione positiva dell'asse x un angolo di 45°:

$$\begin{cases} y = x \\ y(x-2) = 3 \end{cases} \qquad x(x-2) - 3 = 0 \qquad x^2 - 2x - 3 = 0$$

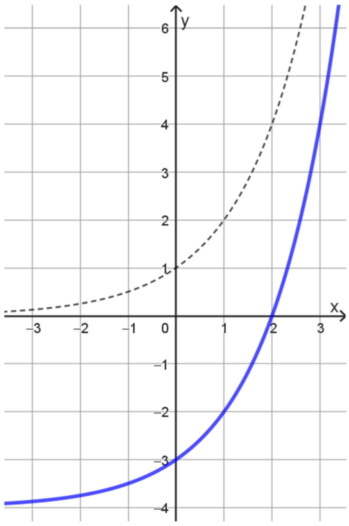
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \quad \boldsymbol{P_1(3;3)} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \quad \boldsymbol{P_2(-1;-1)}$$

6. Tracciare la curva di equazione:

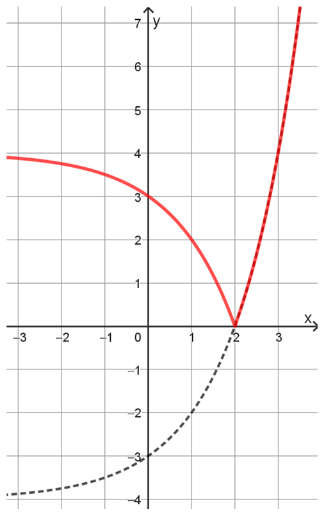
$$y = \begin{cases} |2^x - 4| & se\ x < 3 \\ 4 + \sqrt{2x-6} & se\ 3 \le x < 8 \end{cases}$$



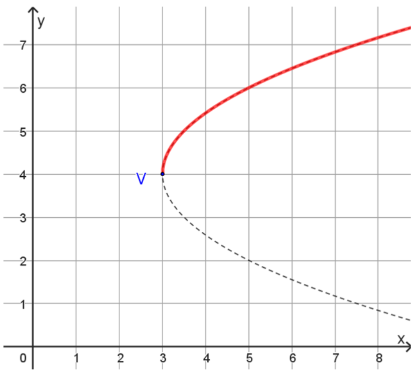
Rappresento la funzione $y = 2^x$



Effettuo una traslazione di vettore $\vec{v}(0, -4)$

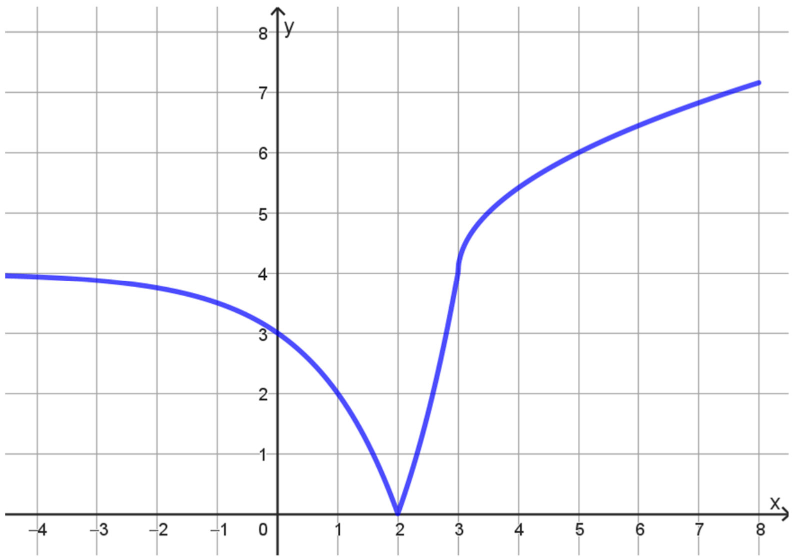


Applico il valore assoluto



$$\begin{cases} y \ge 4 \\ 2x - 6 \ge 0 \\ (y-4)^2 = 2x - 6 \end{cases}$$

Ottengo l'arco per $y \ge 4$ della parabola $x = \frac{1}{2}y^2 - 4y + 11$ di vertice $V(3,4)$



Unisco i due grafici negli intervalli richiesti

7. Determinare le rette passanti per l'origine sulle quali l'iperbole $25\,x^2 - y^2 = 1$ stacca corde di lunghezza $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Data la generica retta passante per l'origine $y = kx$, determino le sue intersezioni con l'iperbole in funzione del parametro e pongo la distanza tra i due punti uguale a $\frac{\sqrt{10}}{2}$:

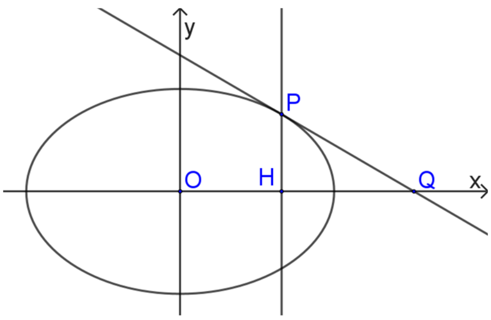
$$\begin{cases} 25x^2 - y^2 = 1 \\ y = kx \end{cases} \qquad 25x^2 - k^2x^2 = 1 \qquad x^2(25-k^2) = 1 \qquad x = \pm\frac{1}{\sqrt{25-k^2}}$$

$$A\left(\frac{1}{\sqrt{25-k^2}}; \frac{k}{\sqrt{25-k^2}}\right) \qquad B\left(-\frac{1}{\sqrt{25-k^2}}; -\frac{k}{\sqrt{25-k^2}}\right)$$

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{25-k^2}}+\frac{1}{\sqrt{25-k^2}}\right)^2 + \left(\frac{k}{\sqrt{25-k^2}}+\frac{k}{\sqrt{25-k^2}}\right)^2} = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{25-k^2}}$$

$$\left(\frac{2\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{25-k^2}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 \qquad 8(1+k^2) = 5(25-k^2) \qquad 13k^2 = 117 \qquad k^2 = 9 \qquad \boldsymbol{y = \pm 3x}$$

8. Considerare un'ellisse di centro O. Sia P un punto dell'ellisse, H la proiezione di P sull'asse focale e Q il punto di intersezione della tangente all'ellisse in P con l'asse focale. Dimostrare che il prodotto $\overline{OH} \cdot \overline{OQ}$ è costante e uguale al quadrato della misura del semiasse maggiore dell'ellisse.



Sia data la generica ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con i fuochi sull'asse x, e sia $P(x_o; y_o)$ il punto dell'ellisse. Allora H ha coordinate $H(x_o; 0)$. Determino la tangente t all'ellisse in P, usando la formula di sdoppiamento:

$$t: \frac{xx_o}{a^2} + \frac{yy_o}{b^2} = 1$$

Il punto Q, intersezione tra la retta tangente e l'asse x, ha coordinate: $Q\left(\frac{a^2}{x_o}; 0\right)$.

Avendo scelto P nel primo quadrante, Q si trova sul semiasse positivo delle x. Calcolo il prodotto delle distanze, sapendo che $\overline{OH} = x_o$ e $\overline{OQ} = \frac{a^2}{x_o}$:

$$\overline{OH} \cdot \overline{OQ} = x_o \cdot \frac{a^2}{x_o} = a^2$$

Il semiasse maggiore dell'ellisse ha misura a, perciò ho dimostrato quanto richiesto.