1. Un allenatore di calcio ha a disposizione quattro attaccanti, sei centrocampisti e cinque difensori. Ha scelto di giocare con il modulo 4-3-3, che prevede quattro difensori, tre centrocampisti e tre attaccanti, ma non ha ancora scelto i giocatori titolari. Quante squadre e quante formazioni potrebbe schierare, sapendo che ha a disposizione anche tre portieri?

L'esercizio in questione mette in evidenza la differenza tra le due richieste: nella squadra, non è importante la posizione del giocatore, ma solo il suo ruolo (l'attaccante sarà sempre e comunque un attaccante, non potrà fare il portiere!), eppure ogni squadra può avere diverse formazioni, perché lo stesso attaccante può avere una diversa posizione in campo, perciò:

- per calcolare le squadre possibili, devo moltiplicare tra loro il numero possibile di terne di attaccanti, il numero possibile di terne di centrocampisti, il numero possibile di quaterne di difensori e 3, ovvero il numero di scelte possibili tra i portieri:

$$\binom{4}{3}\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{5}{4}\cdot 3 = \mathbf{1\,200}$$

- per calcolare le formazioni possibili, devo aggiungere, al numero delle squadre, le permutazioni possibili all'interno delle singole terne (escluso il caso dei portieri). Aggiungere al conteggio, significa moltiplicare il numero delle squadre per le permutazioni:

$$1\,200\cdot 3!\cdot 3!\cdot 4! = \mathbf{1\,036\,800}$$

2. Daniela ha una somma tale da acquistare sette libri da leggere in vacanza. Ne ha già scelti alcuni, ma è indecisa sugli altri da scegliere fra otto titoli diversi. Se ha 56 modi diversi per effettuare la scelta, quanti sono i libri che ha già scelto?

Dato x il numero dei libri che mi restano ancora da scegliere, $7-x$ è il numero dei libri che ho già scelto.
Per calcolare in quanti modi posso scegliere x libri tra 8 libri diversi, devo calcolare:

$$\binom{8}{x} = 56 \quad\Rightarrow\quad \frac{8!}{x!\,(8-x)!} = 56 \quad\Rightarrow\quad 6! = x!\,(8-x)!$$

Per determinare il valore incognito ho due scelte:

- posso procedere per tentativi:

$$x=1:\ \ 6!\neq 1!\,7! \qquad x=2:\ \ 6!\neq 2!\,6! \qquad x=3:\ \ 6!\neq 3!\,5!$$

Data la legge delle classi complementari per i coefficienti binomiali, le soluzioni possono essere due, ovvero 3 o 5. In altre parole, Daniela ha già scelto **4** o **2** libri.

- posso riscrivere il primo membro dell'equazione in modo "conveniente", sfruttando la definizione ricorsiva di fattoriale:

$$6! = 6\cdot 5! = 3!\cdot 5! \quad\Rightarrow\quad 3!\cdot 5! = x!\,(8-x)!$$

Perciò: $x = 3 \quad\vee\quad x = 5$. In altre parole, Daniela ha già scelto **4** o **2** libri.

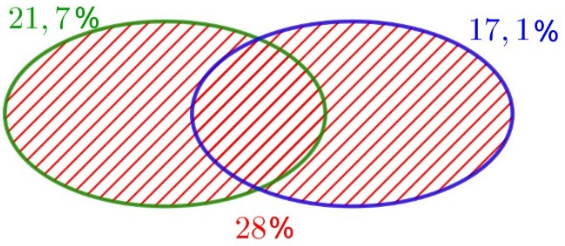
3. Calcola la probabilità che, lanciando quattro monete, esca testa due volte, sapendo che è uscita almeno una volta.

Sapendo che è uscita testa almeno una volta, posso escludere il caso in cui siano uscite quattro croci. Questo restringe il campo: con quattro monete posso ottenere 16 risultati diversi, togliendo quello delle quattro croci, ho 15 risultati diversi. Posso quindi determinare il numero di risultati possibili con due teste, considerando la sequenza di T e C come un anagramma, e in questo caso si tratta di una parola di 4 lettere, con 2 C e 2 T:

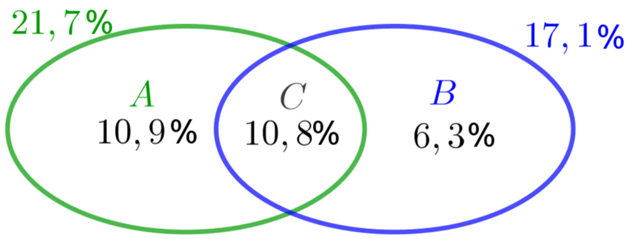
$$\frac{\frac{4!}{2!\,2!}}{16-1} = \mathbf{\frac{2}{5}}$$

4. Sai che il 21,7% della popolazione italiana ha almeno 65 anni e che il 17,1% della popolazione totale è iperteso, cioè soffre di ipertensione arteriosa. Inoltre, il 28% della popolazione ha almeno 65 anni o soffre di ipertensione arteriosa.
   A. Scegliendo a caso un individuo tra la popolazione italiana, calcola la probabilità che abbia almeno 65 anni e sia iperteso.
   B. Se un individuo ha almeno 65 anni, qual è la probabilità che soffra di ipertensione arteriosa? E se ha meno di 65 anni?
   C. Se un individuo è iperteso, qual è la probabilità che abbia meno di 65 anni?

Per facilitare lo svolgimento dell'esercizio, è conveniente rappresentare i singoli gruppi insiemisticamente. L'insieme della popolazione italiana con età superiore a 65 anni è l'insieme rappresentato in verde, l'insieme degli ipertesi è in blu. I due insiemi danno, in totale il 28% della popolazione. Determino la percentuale delle persone ipertese e con età superiore a 65 anni:



$$21{,}7\% + 17{,}1\% - 28\% = 10{,}8\%$$



Ora è più semplice procedere con le risposte:

A. La popolazione richiesta è quella data dall'intersezione dei due insiemi, perciò: $\mathbf{10,8\%}$.

B. I casi favorevoli, per la prima richiesta, sono dati dal 21,7% della popolazione. All'interno di questo insieme, scelgo gli individui ipertesi:

$$p\big(C\big|(A\cup C)\big)=\frac{p\big(C\cap(A\cup C)\big)}{p(A\cup C)}=\frac{p(C)}{p(A\cup C)}=\frac{10{,}8\ \%}{21{,}7\ \%}=\mathbf{49,8\%}$$

I casi favorevoli, per la seconda richiesta, sono dati dal 78,3% (ottenuto sottraendo gli ultrasessantacinquenni dalla popolazione totale):

$$p\big(B\big|(\overline{A\cup C})\big)=\frac{p\big(B\cap(\overline{A\cup C})\big)}{p(\overline{A\cup C})}=\frac{p(B)}{1-p(A\cup C)}=\frac{6{,}3\ \%}{78{,}3\ \%}=\mathbf{8,0\%}$$

C. I casi favorevoli sono dati dalla popolazione degli ipertesi, perciò:

$$p\big(B\big|(B\cup C)\big)=\frac{p\big(B\cap(B\cup C)\big)}{p(B\cup C)}=\frac{p(B)}{p(B\cup C)}=\frac{6{,}3\ \%}{17{,}1\ \%}=\mathbf{36,8\%}$$

5. Nel lancio di due dadi calcola la probabilità che il punteggio sia:
   A. maggiore di 10 e divisibile per 3;
   B. uguale a 4 o minore di 6;
   C. dispari o multiplo di 3;
   D. pari oppure non divisibile per 5.

Il lancio di due dadi può avere 36 risultati, così distribuiti:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

A. L'unico numero maggiore di 10 e divisibile per 3 è 12, che si può ottenere solo come risultato 6 per entrambi i dadi: $\mathbf{\frac{1}{36}}$.

B. I numeri uguali a 4 o minori di 6 sono 2, 3, 4 e 5, e si tratta di risultati indipendenti tra loro, perciò:

$$p(2\cup3\cup4\cup5)=p(2)+p(3)+p(4)+p(5)=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}=\frac{10}{36}=\mathbf{\frac{5}{18}}$$

C. I numeri dispari o multipli di 3 sono: 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, indipendenti tra loro:

$$p(3)+p(5)+p(6)+p(7)+p(9)+p(11)+p(12)=\frac{2+4+5+6+4+2+1}{36}=\frac{24}{36}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

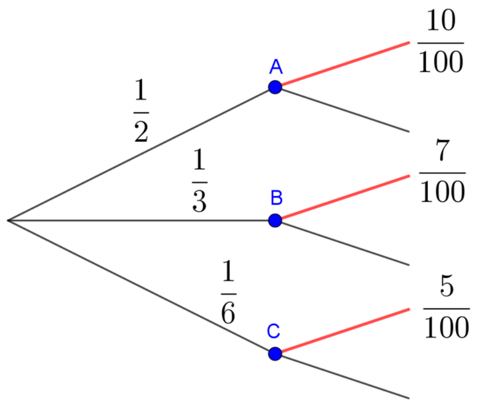
D. I numeri pari oppure non divisibili per 5 sono tutti i numeri tranne il 5, perciò:

$$p=1-p(5)=1-\frac{4}{36}=\mathbf{\frac{8}{9}}$$

6. Un'azienda industriale possiede tre stabilimenti (A, B e C). Nello stabilimento A si produce la metà dei pezzi e di questi il 10% sono difettosi. Nello stabilimento B si produce un terzo dei pezzi, e il 7% sono difettosi. Nello stabilimento C si producono i pezzi rimanenti, e il 5% sono difettosi. Sapendo che un pezzo è difettoso, con quale probabilità esso proviene dallo stabilimento A?

Esame di Stato di liceo scientifico – corso sperimentale PNI – Sessione ordinaria 2012, Quesito 8

Si tratta di un'applicazione del teorema di Bayes:



$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{100}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{100}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{100}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{100}}=\frac{30}{49}=\mathbf{61,2\%}$$

7. Un dado regolare a 6 facce viene lanciano 8 volte. Qual è la probabilità di ottenere tre volte la faccia "5"? Qual è la probabilità di ottenere la faccia "5" per la terza volta all'ottavo lancio?

Esame di Stato di liceo scientifico – Sessione suppletiva 2023, Quesito 2

La probabilità di ottenere 5 è $1/6$, mentre la probabilità di avere un'altra faccia è $5/6$. Applicando il teorema delle prove ripetute:

$$p(x=3)=\binom{8}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^5=7\left(\frac{5}{6}\right)^5=\frac{21\,875}{209\,952}=\mathbf{10,4\%}$$

Chiedere la probabilità di ottenere la faccia "5" per la terza volta all'ottavo lancio è comprensibile se ci si riferisce al quesito precedente: delle tre volte in cui esce la faccia "5", viene richiesta quella in cui la terza faccia "5" compare all'ultimo lancio. Perciò applico il teorema delle prove ripetute ai primi 7 la terza faccia "5" la voglio ottenere all'ultimo lancio, considero solo i primi 7 lanci, per i quali dovrà risultare per due volte "5":

$$p(x=2)=\binom{7}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^5\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{72}\left(\frac{5}{6}\right)^5=\frac{21\,875}{559\,872}=\mathbf{3,9\%}$$

8. In un salvadanaio ci sono 15 monete, di cui 9 sono da 1 euro e le altre 6 da 2 euro. Se ne estraggono 6 contemporaneamente.
   A. Qual è la probabilità che il valore totale delle monete estratte sia esattamente 10 euro?
   B. Qual è la probabilità che il valore totale delle monete estratte sia al massimo 10 euro?

Esame di Stato di liceo scientifico – Sessione suppletiva 2024, Quesito 2

A. Per ottenere 10 euro con sei estrazioni, ho bisogno di avere **due monete da 1 euro e tutte le altre da 2 euro**. Non posso applicare il teorema delle prove ripetute, dato che non c'è reimmissione (il testo dice "contemporaneamente"), perciò la probabilità di estrazione di ogni moneta cambia dopo ogni estrazione. Devo, inoltre, moltiplicare la probabilità per i casi possibili: trattandosi di 6 estrazioni con 2 monete da 1 euro e 4 da 2 euro, applico il calcolo combinatorio, considerando le estrazioni come un anagramma:

$$\frac{6!}{2!\,4!}\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{8}{14}\cdot\frac{6}{13}\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}=\frac{\mathbf{108}}{\mathbf{1001}}$$

B. Per calcolare la probabilità che il valore totale delle monete sia al massimo 10 euro, conviene calcolare la probabilità contraria, ovvero il contrario della probabilità di ottenere 11 o 12 euro come totale. Ottengo 11 euro con 5 monete da 2 euro e una da 1; ottengo 12 euro con 6 monete da 2 euro:

$$1-\frac{6!}{1!\,5!}\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{6}{14}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11}\cdot\frac{2}{10}-\frac{6}{15}\cdot\frac{5}{14}\cdot\frac{4}{13}\cdot\frac{3}{12}\cdot\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{10}=\frac{\mathbf{90}}{\mathbf{91}}$$

9. Un dado truccato, con le facce numerate da 1 a 6, gode della proprietà di avere ciascuna faccia pari che si presenta con probabilità doppia rispetto a ciascuna faccia dispari. Calcolare le probabilità di ottenere, lanciando una volta il dado, rispettivamente:
   A. un numero primo;
   B. un numero almeno uguale a 3;
   C. un numero al più uguale a 3.

Esame di Stato di liceo scientifico – Sessione ordinaria 2023, Quesito 2

Sapendo che $p(P) = 2p(D)$ e che $3 \cdot p(P) + 3 \cdot p(D) = 1$, ottengo: $6x + 3x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{9}$, cioè: $p(P) = \frac{2}{9} \quad p(D) = \frac{1}{9}$.

A. I numeri primi sono 2, 3 e 5 e sono eventi indipendenti:

$$p(2 \cup 3 \cup 5) = p(2) + p(3) + p(5) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \mathbf{\frac{4}{9}}$$

B. Un numero almeno uguale a 3 significa 3, 4, 5 o 6, tutti eventi indipendenti:

$$p(3 \cup 4 \cup 5 \cup 6) = p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

C. Un numero al più uguale a 3 significa 1, 2 o 3:

$$p(1 \cup 2 \cup 3) = p(1) + p(2) + p(3) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \mathbf{\frac{4}{9}}$$