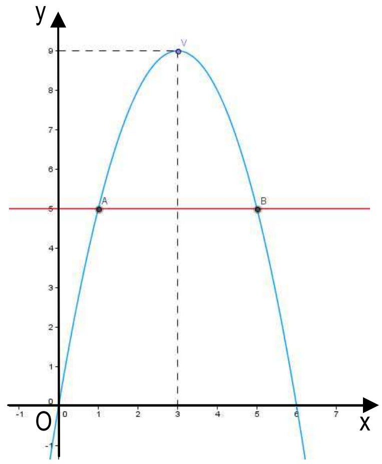
1. Data la parabola di equazione $y = -x^2 + 6x$, indicato con V il vertice, determina l'area del triangolo AVB, dove A e B sono i punti di intersezione della parabola con la retta di equazione $y = 5$.



Metto a sistema l'equazione della parabola con quella della retta, per determinare le coordinate dei punti di intersezione:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 6x \\ y = 5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-5}}{1} = \left\langle \begin{matrix} 1 & \quad A\,(1;5) \\ 5 & \quad B\,(5;5) \end{matrix} \right.$$

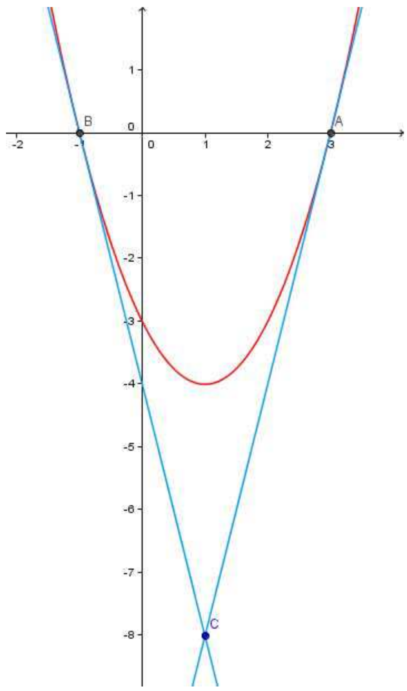
Determino le coordinate del vertice V: $V\left(-\frac{b}{2a};\,-\frac{\Delta}{4a}\right) = (3;9)$

Il triangolo AVB è un triangolo isoscele, visto che è simmetrico rispetto alla perpendicolare alla base, perciò calcolo la lunghezza della base AB, poi calcolo l'altezza, ovvero la distanza del vertice dalla retta y = 5, e poi posso calcolare l'area:

$$AB = |5-1| = 4 \qquad\qquad h = d(V; AB) = \frac{|9-5|}{1} = 4$$

$$A_{AVB} = \frac{4 \cdot 4}{2} = \mathbf{8}$$

2. È data la parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 3$. Dopo aver determinato le equazioni delle rette a essa tangenti, uscenti dal punto $C\,(1; -8)$, trova le coordinate dei punti di intersezione A e B delle tangenti con l'asse x e verifica che la loro distanza è 4.



Determino l'equazione del fascio di rette di centro C e metto a sistema l'equazione così determinata con l'equazione della parabola, ponendo poi ∆ = 0 nell'equazione risolvente. In questo modo, determino i coefficienti angolari delle due rette tangenti alla parabola:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y + 8 = m(x-1) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 3 + 8 = m(x-1)$$

$$x^2 - x\,(m+2) + 5 + m = 0$$

$$\Delta = (m+2)^2 - 4\,(5+m) = 0$$

$$m^2 + 4m + 4 - 20 - 4m = 0$$

$$m^2 - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \pm 4$$

Le due rette tangenti hanno equazione: $y = 4x - 12$ e $y = -4x - 4$.

Metto a sistema le due equazioni con l'equazione dell'asse x per determinare le coordinate dei punti A e B e verificare poi che la loro distanza è 4:

$$\begin{cases} y = 4x - 12 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A(3;0)$$

$$\begin{cases} y = -4x - 4 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B(-1;0)$$

$$AB = |3+1| = \mathbf{4} \qquad\qquad c.v.d.$$

3. Scrivi l'equazione di un'ellisse che ha i fuochi sull'asse y, asse minore lungo 4 e distanza focale uguale a 2.

L'asse minore, visto che l'ellisse ha i fuochi sull'asse y, ha generico valore 2a e la distanza focale è 2c, perciò:

$$\begin{cases} 2a = 4 \\ 2c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c^2 = b^2 - a^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b^2 = 1 + 4 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1}$$

4. Data l'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 16$, trova la lunghezza della corda individuata sulla retta che passa per i punti $A\left(1;\frac{5}{2}\right)$ e $B\,(-2;1)$.

Determino innanzi tutto l'equazione della retta passante per i punti A e B:

$$\frac{x+2}{1+2} = \frac{y-1}{\frac{5}{2}-1} \Rightarrow \frac{x+2}{3} = \frac{2y-2}{3} \Rightarrow x + 2 = 2y - 2 \Rightarrow x - 2y + 4 = 0$$

Metto a sistema l'equazione della retta con quella dell'ellisse e determino le coordinate dei punti di intersezione tra i due oggetti:

$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - 4 \\ (2y-4)^2 + 4y^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - 4 \\ 4y^2 - 16y + 16 + 4y^2 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y - 4 \\ 8y^2 - 16y = 0 \end{cases} \Rightarrow 8y\,(y-2) = 0$$

I due punti hanno coordinate: $C\,(-4;0)$ $D\,(0;2)$

Determino quindi la lunghezza della corda CD, calcolando la distanza tra i due punti:

$$CD = \sqrt{(-4-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{2^2+1} = \boldsymbol{2\sqrt{5}}$$

5. Determina le equazioni delle tangenti all'ellisse di equazione $9x^2 + 16y^2 = 144$, condotte dai suoi punti di intersezione con gli assi cartesiani.

I punti di intersezione di un'ellisse con gli assi cartesiani coincidono con i vertici dell'ellisse, perciò scriviamola in forma canonica per determinarli:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

I vertici hanno coordinate:

$$A_1(4;0) \quad A_2(-4;0) \quad B_1(0;3) \quad B_2(0;-3)$$

Le rette tangenti all'ellisse passanti per i vertici sono le parallele agli assi cartesiani, ovvero:

$$\boldsymbol{x = 4 \qquad x = -4 \qquad y = 3 \qquad y = -3}$$

6. Determina l'equazione della tangente all'ellisse di equazione $x^2 + 3y^2 = 36$, condotta dal suo punto del primo quadrante di ordinata 3.

Innanzi tutto determino l'ascissa del punto di tangenza, sostituendo nell'equazione dell'ellisse l'ordinata data. Tra i due risultati che otterrò, scelgo il risultato positivo, visto che il punto appartiene al primo quadrante:

$$x^2 + 3y^2 = 36 \Rightarrow x^2 + 27 = 36 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = \pm 3$$

Il punto di tangenza ha coordinate $P\,(3;3)$. A questo punto, applico la formula di sdoppiamento:

$$xx_o + 3yy_o = 36 \Rightarrow 3x + 9y = 36 \Rightarrow \boldsymbol{x + 3y = 12}$$

7. Scrivi l'equazione dell'iperbole avente un fuoco in $(-5;0)$ e un asintoto di equazione $y=\sqrt{\frac{2}{3}}\,x$.

Conoscendo il fuoco dell'iperbole conosciamo il valore del parametro c, mentre l'asintoto ci offre il rapporto tra i parametri a e b:

$$\begin{cases} c=5 \\ \dfrac{b}{a}=\sqrt{\dfrac{2}{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c^2=a^2+b^2=25 \\ \dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+\dfrac{2}{3}a^2=25 \\ b^2=\dfrac{2}{3}a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{5}{3}a^2=25 \\ b^2=\dfrac{2}{3}a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=15 \\ b^2=10 \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{10}=1 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{2x^2-3y^2=30}$$

$\boxed{8.}$ Scrivi l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse y passante per i punti $\left(1;\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ e $(4;\ \sqrt{5})$.

Per semplicità di calcolo scriviamo l'equazione dell'iperbole sostituendo: $\frac{1}{a^2}=A$ e $\frac{1}{b^2}=B$, cioè l'equazione diventa: $Ax^2-By^2=-1$.

Sostituiamo quindi le coordinate dei due punti nell'equazione e risolviamo il sistema:

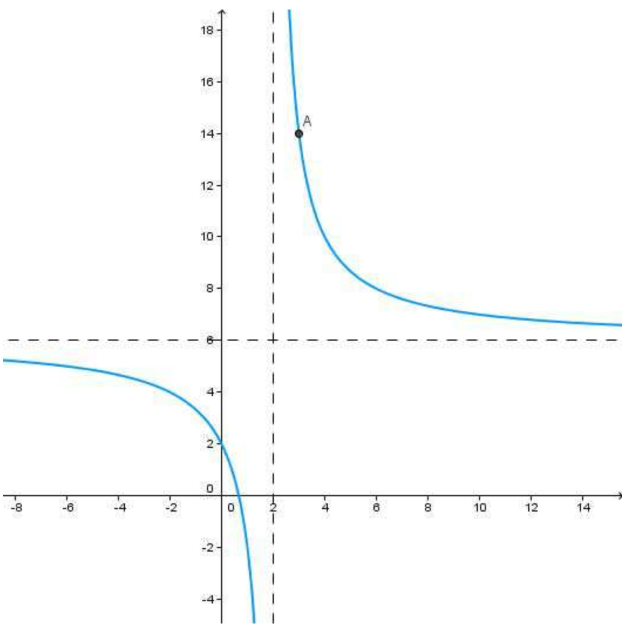
$$\begin{cases} A-\dfrac{5}{4}B=-1 \\ 16A-5B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{5}{4}B-1 \\ 20B-16-5B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{5}{4}B-1 \\ 15B=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{4} \\ B=1 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{\frac{x^2}{4}-y^2=-1}$$

9. Data l'equazione $y=\frac{3hx+k}{x-m}$, determina $h,k,m\in\mathbb{R}$ in modo che il grafico della funzione passi per il punto $A\,(3;14)$ e gli asintoti siano $x=2$ e $y=6$. Disegna la curva così ottenuta.

Impongo il passaggio del grafico per il punto A, sostituendo le coordinate di A nell'equazione e impongo le equazioni generiche degli asintoti: $x=-\frac{d}{c}$ e $y=\frac{a}{c}$ uguali ai valori dati:

$$\begin{cases} 14=\dfrac{9h+k}{3-m} \\ -\dfrac{-m}{1}=2 \\ \dfrac{3h}{1}=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14=\dfrac{9h+k}{3-m} \\ m=2 \\ h=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14=18+k \\ m=2 \\ h=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k=-4 \\ m=2 \\ h=2 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{y=\frac{6x-4}{x-2}}$$



$\boxed{10.}$ $8^x\cdot\sqrt{2}=4^x$

$$2^{3x}\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2^{2x} \quad\Rightarrow\quad 2^{3x+\frac{1}{2}}=2^{2x} \quad\Rightarrow\quad 3x+\frac{1}{2}=2x \quad\Rightarrow\quad x=\mathbf{-\frac{1}{2}}$$

11. $4^{x+1} + 3^x = 0$

Impossibile, in quanto entrambi gli esponenziali sono sempre positivi e la somma di due quantità positive non può mai essere nulla!

$\boxed{12.}$ $8 + 2^{x+1} = 2^{2x}$

Pongo $2^x = t$:

$$8 + 2t = t^2 \quad \Longrightarrow \quad t^2 - 2t - 8 = 0 \qquad\qquad t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{1} = \left\langle \begin{array}{lll} 4 & 2^x = 4 & x = \mathbf{2} \\ -2 & 2^x = -2 & imp. \end{array} \right.$$

13. $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+3} < \left(\frac{5}{2}\right)^{x-2}$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x+3} < \left(\frac{2}{5}\right)^{-x+2} \quad \Longrightarrow \quad x + 3 > -x + 2 \quad \Longrightarrow \quad 2x > -1 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x > -\frac{1}{2}}$$

$\boxed{14.}$ $\frac{1}{3}\log(9x + 8 - x^3) = \log(2 - x)$

$$\log(9x + 8 - x^3) = 3\log(2 - x) \quad \Longrightarrow \quad \log(9x + 8 - x^3) = \log(2 - x)^3 \quad \Longrightarrow \quad 9x + 8 - x^3 = (2 - x)^3$$

$$9x + 8 - x^3 = 8 - 12x + 6x^2 - x^3 \quad \Longrightarrow \quad 6x^2 - 21x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ll} \boldsymbol{x = 0} & acc. \\ x = \frac{7}{2} & non\ acc. \end{array}$$

15. $\log x - \log(x + 1) = \log 2 - \log 5$

$$C.A.: \begin{cases} x > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ x > -1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x > 0$$

$$\log x + \log 5 = \log 2 + \log(x + 1) \quad \Longrightarrow \quad \log(5x) = \log(2x + 2) \quad \Longrightarrow \quad 5x = 2x + 2 \quad \Longrightarrow \quad x = \boldsymbol{\frac{2}{3}} \quad acc.$$

$\boxed{16.}$ $\log(2x - x^2) < \log(x - 2)$

$$C.A.: \begin{cases} 2x - x^2 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 0 < x < 2 \\ x > 2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{imp.}$$

17. $\log(3 - x)^2 - 2\log(4 + x) < 0$

$$C.A.: \begin{cases} 3 - x \neq 0 \\ 4 + x > 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x \neq 3 \\ x > -4 \end{cases}$$

$$2\log(3 - x) < 2\log(4 + x) \quad \Longrightarrow \quad \log(3 - x) < \log(4 + x) \quad \Longrightarrow \quad 3 - x < 4 + x \quad \Longrightarrow \quad x > -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x > -4 \ \wedge \ x \neq 3 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x > -\frac{1}{2} \wedge x \neq 3}$$