1. $\frac{3x^2-x-2}{4}-\frac{2}{5}x=-x+\frac{3}{5}x$

$$\frac{3x^2-x-2}{4}=0 \qquad 3x^2-x-2=0$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{6}\left\langle \begin{array}{l} \mathbf{1} \\ -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \end{array}\right.$$

2. $\frac{x}{x-1}-1=\frac{2}{5}x+\frac{3x-1}{1-x}$

$$\frac{x}{x-1}-1=\frac{2}{5}x-\frac{3x-1}{x-1} \qquad 5x-5\,(x-1)=2x\,(x-1)-5\,(3x-1) \qquad C.A.: x\neq 1$$

$$5x-5x+5=2x^2-2x-15x+5 \qquad 2x^2-17x=0$$

$$x\,(2x-17)=0 \qquad x_1=\mathbf{0}\ \boldsymbol{acc.} \qquad x_2=\frac{\mathbf{17}}{\mathbf{2}}\ \boldsymbol{acc.}$$

3. $\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2-x}+\frac{2}{(x+2)^2}+\frac{2}{(x-2)^2}=\frac{1}{x^2-4}$

$$\frac{x-2-x-2-1}{(2+x)(x-2)}+\frac{2}{(x+2)^2}+\frac{2}{(x-2)^2}=0$$

$$\frac{-5}{x^2-4}+\frac{2}{(x+2)^2}+\frac{2}{(x-2)^2}=0$$

$$\frac{-5\,(x^2-4)+2(x-2)^2+2(x+2)^2}{(x^2-4)^2}=0 \qquad C.A.: x\neq \pm 2$$

$$-5x^2+20+2x^2-8x+8+2x^2+8x+8=0 \qquad x^2-36=0 \qquad x=\pm\mathbf{6} \qquad \boldsymbol{acc.}$$

4. $x^2-4\,(a+2b)x+32\,ab=0$

$$\frac{\Delta}{4}=4(a+2b)^2-32ab=4a^2+16b^2+16ab-32ab=4a^2+16b^2-16ab=2(a-2b)^2$$

$$x_{1,2}=\frac{2(a+2b)\pm 2(a-2b)}{1}\left\langle \begin{array}{l} \mathbf{4a} \\ \mathbf{8b} \end{array}\right.$$

5. $(b+2)\,x^2-(3+4b+2b^2)\,x+6b=0$

Se $b=-2$: $\quad -3x-12=0 \qquad x=-4$

Se $b\neq -2$: $\quad \Delta=(3+4b+2b^2)^2-24b\,(b+2)=9+16b^2+4b^4+24b+12b^2+16b^3-24b^2-48b=$

$$=9+16b^2+4b^4-24b-12b^2+16b^3=(3-4b-2b^2)^2$$

$$x_{1,2}=\frac{3+4b+2b^2\pm(3-4b-2b^2)}{2\,(b+2)}\left\langle \begin{array}{l} \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{b+2}} \\ 2\frac{4b+2b^2}{2\,(b+2)}=\mathbf{2b} \end{array}\right.$$

6. $x^4 - x^3 - 3x^2 + 3x = 0$

$$x\,(x^3 - x^2 - 3x + 3) = 0$$
$$x\,[\,x^2\,(x-1) - 3\,(x-1)] = 0$$
$$x\,(x-1)(x^2-3) = 0$$
$$x_1 = \mathbf{0} \qquad x_2 = \mathbf{1} \qquad x_{3,4} = \pm\sqrt{\mathbf{3}}$$

7. $(x^2 - 27)(x^2 + 7) + 253 = 0$

$$x^4 - 20x^2 - 189 + 253 = 0 \qquad x^4 - 20x^2 + 64 = 0$$
$$(x^2-16)(x^2-4) = 0$$
$$x_{1,2} = \pm\mathbf{4} \qquad x_{3,4} = \pm\mathbf{2}$$

8. $6x^4 - 19x^3 + 25x^2 - 19x + 6 = 0$

Dopo aver verificato che $x = 0$ non è una soluzione dell'equazione per x^2:

$$6x^2 - 19x + 25 - \frac{19}{x} + \frac{6}{x^2} = 0 \qquad 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 19\left(x + \frac{1}{x}\right) + 25 = 0$$

Pongo: $x + \frac{1}{x} = y$, perciò: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = y^2 \qquad x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = y^2 \qquad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$

$$6\,(y^2 - 2) - 19y + 25 = 0 \qquad 6\,y^2 - 19y + 13 = 0$$
$$y_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 312}}{12} \Big\langle \begin{matrix} \mathbf{\frac{13}{6}} \\ \mathbf{1} \end{matrix}$$

Perciò:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6} \qquad 6x^2 - 13x + 6 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{12} \Big\langle \begin{matrix} \mathbf{\frac{3}{2}} \\ \mathbf{\frac{2}{3}} \end{matrix}$$

$$x + \frac{1}{x} = 1 \qquad x^2 - x + 1 = 0$$
$$\nexists\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$$

9. $(x^3 - 4)^2 - 27\,(x^3 - 4) + 92 = 0$

Pongo: $x^3 - 4 = y$, perciò: $\quad y^2 - 27y + 92 = 0 \qquad y_{1,2} = \frac{27 \pm \sqrt{729 - 368}}{2} \Big\langle \begin{matrix} \mathbf{23} \\ \mathbf{4} \end{matrix}$

Perciò:

$$x^3 - 4 = 23 \qquad x^3 = 27$$
$$x_1 = \mathbf{3}$$

$$x^3 - 4 = 4 \qquad x^3 = 8$$
$$x_2 = \mathbf{2}$$

10. Nell'equazione $x^2 - 2\,(k-1)\,x + 4 + k^2 = 0$ determina il parametro k in modo che:
   A. le soluzioni siano reali;
   B. la somma delle radici sia – 6;
   C. le soluzioni siano opposte;
   D. il prodotto delle radici sia 40;
   E. la somma dei reciproci delle radici sia $-\frac{1}{2}$

A. Perché le soluzioni siano reali, devo avere: $\frac{\Delta}{4} \geq 0$:

$$(k-1)^2 - (4+k^2) \geq 0 \qquad k^2 - 2k + 1 - 4 - k^2 \geq 0$$

$$-2k \geq 3 \qquad \boldsymbol{k \leq -\frac{3}{2}}$$

B. Perché la somma delle radici sia – 6, ovvero: $x_1 + x_2 = -6$, devo avere:

$$-\frac{b}{a} = 2(k-1) = -6 \qquad k = \mathbf{-2}$$

C. Perché le soluzioni siano ovvero: $x_1 + x_2 = 0$, devo avere il coefficiente del termine di primo grado nullo:

$$2(k-1) = 0 \qquad k = 1\ non\ acc. \qquad \boldsymbol{\nexists k \in \mathbb{R}}$$

D. Perché le due soluzioni abbiano prodotto uguale a 40, devo avere:

$$\frac{c}{a} = 40 \qquad k^2 + 4 = 40 \qquad k^2 = 36 \qquad k = \pm 6 \qquad k = \mathbf{-6}$$

Devo escludere la soluzione k = – 6, perché in quel caso l'equazione non è reale

E. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{1}{2} \qquad \frac{x_1+x_2}{x_1 x_2} = -\frac{1}{2} \qquad \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{1}{2} \qquad \frac{b}{c} = \frac{1}{2} \qquad 2b = c$

$$-4k + 4 = 4 + k^2 \qquad k^2 + 4k = 0$$

$$k_1 = 0\ non\ acc. \qquad k_2 = \mathbf{-4}\ \ acc.$$