1. Un dado non è regolare e le facce 1 e 6 hanno la stessa probabilità di verificarsi, ma doppia di quella di ciascuno degli altri numeri. Calcola la probabilità che nel lancio del dado si presenti:
   A. una faccia con un numero pari;
   B. un numero multiplo di 3;
   C. un numero primo.

   Indico con x la probabilità dei numeri da 2 a 5 e con $2x$ la probabilità di 1 e 6. La somma delle probabilità di tutte le facce dà 1, perciò:

   $$2x + x + x + x + x + 2x = 1 \qquad x = \frac{1}{8}$$

   Perciò: $p(1) = p(6) = \frac{1}{4}$ $\qquad p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = \frac{1}{8}$
   Ora possiamo rispondere alle domande:

   A. $p(pari) = p(2 \cup 4 \cup 6) = p(2) + p(4) + p(6) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{1}{2}}$

   B. $p(3 \cup 6) = p(3) + p(6) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{3}{8}}$

   C. $p(2 \cup 3 \cup 5) = p(2) + p(3) + p(5) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \mathbf{\frac{3}{8}}$

2. Un negozio di abbigliamento femminile, prima dei saldi stagionali, invita con una comunicazione le clienti affezionate a effettuare acquisti al prezzo di saldo prima dell'apertura ufficiale, potendo così avere più scelta. Si stima che il 60% delle clienti leggerà la comunicazione e che il 35% di chi l'ha letta effettuerà poi un acquisto. Calcola la probabilità che una cliente:
   A. legga la comunicazione e faccia un acquisto;
   B. legga la comunicazione e non faccia un acquisto.

   Evento E_1=«lettura della comunicazione», evento E_2=«acquisto»

   A. $p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2) = \frac{60}{100} \cdot \frac{35}{100} = \mathbf{21\%}$

   B. $p(E_1 \cap \overline{E_2}) = p(E_1) \cdot p(\overline{E_2}) = \frac{60}{100} \cdot \frac{65}{100} = \mathbf{39\%}$

3. Si deve inserire nel sistema antifurto di una casa un codice formato da quattro lettere, scelte in un insieme che contiene le cinque vocali e cinque consonanti. Si estraggono le quattro lettere consecutivamente, senza reimmissione delle lettere estratte. Calcola la probabilità che il codice:
   A. contenga almeno una vocale;
   B. contenga vocali e consonanti alternate tra loro.

   A. Faccio la differenza tra la probabilità totale, 1, e la probabilità che non esca nemmeno una vocale:

   $$1 - \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = 1 - \frac{1}{42} = \mathbf{\frac{41}{42}}$$

   B. Vocali e consonanti alternate tra loro si possono ottenere in due modi diversi, o come VCVC o come CVCV:

   $$2 \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \mathbf{\frac{10}{63}}$$

4. Su un vassoio di un bar ci sono 12 brioche, di cui 7 con la crema e 5 con la marmellata, e 8 krapfen, di cui 5 con la crema e 3 con la marmellata. Si sceglie a caso un dolce. Calcola la probabilità di prendere una brioche oppure un dolce con la marmellata.

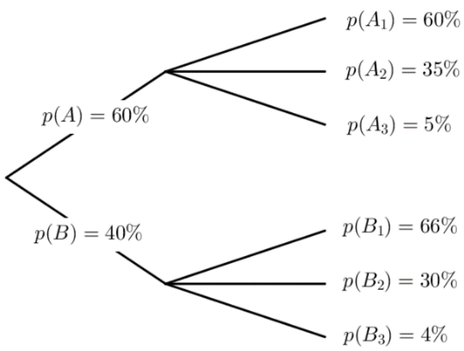
   $$p(B \cup M) = p(B) + p(M) - p(B \cap M) = \frac{12}{20} + \frac{8}{20} - \frac{5}{20} = \frac{15}{20} = \mathbf{\frac{3}{4}}$$

5. Calcola la probabilità che una carta estratta da un mazzo di 52 carte sia un cinque, sapendo che è uscita una carta che non è una figura.

A = «carta uguale a un cinque» B = «carta che non è una figura»

$$p(A|B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{p(A)}{p(B)}=\frac{\frac{4}{52}}{\frac{40}{52}}=\frac{4}{40}=\mathbf{\frac{1}{10}}$$

6. Il reparto A di una fabbrica di ceramiche produce il 60% di piastrelle, il reparto B il 40%. La qualità della produzione del reparto A è: il 60% di prima, il 35% di seconda, il 5% da scartare. La qualità della produzione del reparto B è: il 66% di prima, il 30% di seconda, il 4% da scartare. Qual è la percentuale di produzione di piastrelle di prima qualità della fabbrica? Se prendiamo una piastrella a caso di prima qualità, qual è la probabilità che essa sia stata prodotta dal reparto A?



$$p\big((A\cap A_1)\cup(B\cap B_1)\big)=\frac{60}{100}\cdot\frac{60}{100}+\frac{40}{100}\cdot\frac{66}{100}=\mathbf{62,4\ \%}$$

Per il teorema di Bayes:

$$p(A_1|A)=\frac{p(A_1\cap A)}{p(A)}=\frac{p(A|A_1)\,p(A_1)}{p(A|A_1)\,p(A_1)+p(A|A_2)\,p(A_2)}=$$

$$=\frac{\frac{60}{100}\cdot\frac{60}{100}}{\frac{60}{100}\cdot\frac{60}{100}+\frac{40}{100}\cdot\frac{66}{100}}=\mathbf{\frac{15}{26}}$$

7. Un pullman di linea arriva in ritardo 4 volte su 10. Calcola (esprimendola in frazione) la probabilità che in una settimana (6 giorni) sia:
   A. sempre puntuale;
   B. sempre in ritardo;
   C. almeno una volta in ritardo;
   D. almeno 5 volte in ritardo.

La probabilità che il pullman sia in ritardo è $p(R)=\frac{4}{10}$ mentre la probabilità che sia puntuale è $p(P)=\frac{6}{10}$. Per il teorema delle prove ripetute:

A. $\binom{6}{6}\left(\frac{6}{10}\right)^6\left(\frac{4}{10}\right)^0=\mathbf{\frac{729}{15625}}$

B. $\binom{6}{0}\left(\frac{6}{10}\right)^0\left(\frac{4}{10}\right)^6=\mathbf{\frac{64}{15625}}$

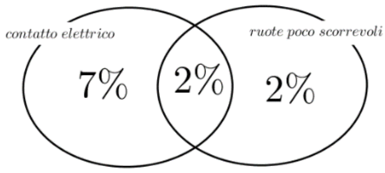
C. Almeno una volta in ritardo lo ottengo come la differenza tra la probabilità dell'evento certo e la probabilità che non sia mai in ritardo (calcolata al punto A):

$$1-\binom{6}{6}\left(\frac{6}{10}\right)^6\left(\frac{4}{10}\right)^0=1-\frac{729}{15625}=\mathbf{\frac{14896}{15625}}$$

D. Almeno cinque volte in ritardo significa in ritardo 5 o 6 volte:

$$\binom{6}{5}\left(\frac{4}{10}\right)^5\left(\frac{6}{10}\right)^1+\binom{6}{6}\left(\frac{4}{10}\right)^6\left(\frac{6}{10}\right)^0=6\cdot\frac{32\cdot 3}{15625}+\frac{64}{15625}=\mathbf{\frac{128}{3125}}$$

8. Una fabbrica di giocattoli ha rilevato che il 9% delle automobiline prodotte di un certo tipo ha il contatto delle pile difettoso e il 4% ha le ruote poco scorrevoli. Sapendo che le automobiline che hanno entrambi i difetti sono il 2%, calcola la probabilità che un'automobilina:
   A. abbia un difetto o l'altro;
   B. sia difettosa nel contatto con le pile sapendo che è poco scorrevole;
   C. abbia solo il difetto del contatto elettrico;
   D. non abbia difetti.



Dal grafico riassuntivo, possiamo dedurre le risposte:

A. si tratta della probabilità dell'insieme unione: **11%**
B. ovvero la percentuale dell'intersezione rispetto al totale delle ruote poco scorrevoli: **50%**
C. **7%**
D. Dal totale devo sottrarre le automobiline con difetto, perciò **89%**

9. Giorgio durante la settimana si reca al lavoro 3 volte su 5 in automobile e parcheggia indifferentemente in via Mazzini o in via Garibaldi. Quando Giorgio non va in automobile, usa la moto e parcheggia sempre in via Copernico. Il suo collega Mario si reca al lavoro tutti i giorni in bicicletta, legandola 8 volte su 10 alle rastrelliere di via Garibaldi e le altre 2 volte in via Mazzini. Qual è la probabilità che entrambi scelgano via Mazzini, indipendentemente l'uno dall'altro?

Per Giorgio la probabilità che vada al lavoro in automobile e parcheggi in via Mazzini è:

$$p(G) = p(A \cap M) = p(A) \cdot p(M) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

La probabilità per Mario è: $p(M) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

Perciò:

$$p(G \cap M) = p(G) \cdot p(M) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{5} = \mathbf{0,06}$$

10. Risolvi la seguente equazione:

$$2\binom{x+1}{3} - 12\binom{x}{x-2} = \binom{x}{3}$$

$$2\frac{(x+1)!}{3!\,(x-2)!} - 12\frac{x!}{(x-2)!\,2!} = \frac{x!}{3!\,(x-3)!} \qquad C.A.: x \geq 3$$

$$2\frac{x(x+1)(x-1)(x-2)!}{6\,(x-2)!} - 12\frac{x(x-1)(x-2)!}{2\,(x-2)!} = \frac{x\,(x-1)(x-2)(x-3)!}{6\,(x-3)!}$$

$$\frac{x(x+1)(x-1)}{3} - 6x(x-1) = \frac{x\,(x-1)(x-2)}{6}$$

Posso dividere entrambi i membri per $x(x-1)$ viste le condizioni di accettabilità:

$$\frac{x+1}{3} - 6 = \frac{x-2}{6} \qquad 2x + 2 - 36 = x - 2 \qquad x = \mathbf{32}\ acc.$$

11. Trova n sapendo che il coefficiente del terzo termine dello sviluppo $(x-2a)^n$ è 112.

$$\binom{n}{2} x^{n-2}(-2a)^2 = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} x^{n-2} \cdot 4a^2 = \frac{n\,(n-1)(n-2)!}{2\,(n-2)!}\,4a^2x^{n-2} = 2\,n\,(n-1)\,a^2x^{n-2}$$

Pongo il coefficiente del terzo termine uguale a 112 ed escludo la soluzione negativa:

$$2n\,(n-1) = 112 \qquad n^2 - n - 56 = 0 \qquad (n-8)(n+7) = 0 \qquad n = \mathbf{8}$$

12. A una offerta di lavoro per tre posti di magazziniere si presentano 32 candidati. In quanti modi si possono fare le tre assunzioni?

Si tratta di una combinazione: $C_{32,3} = \binom{32}{3} = \frac{32!}{3!\,29!} = \mathbf{4960}$

13. Trova in quanti modi si possono riporre quattro oggetti distinti in sei scatole diverse sapendo che è possibile riporre in una scatola più oggetti.

Per ogni oggetto abbiamo la possibilità di scegliere tra sei diverse scatole: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = \mathbf{1296}$

14. Quanti numeri di quattro cifre distinte, scelte tra 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, si possono formare? Quanti di questi sono pari? Quanti dispari? Quanti terminano con 2? Quanti sono maggiori di 6000?

Dal momento in cui conta l'ordine con il quale scelgo le cifre, devo calcolare una disposizione: $D_{7,4} = \frac{7!}{3!} = \mathbf{840}$

Se il numero è pari, vuol dire che ho tre scelte possibili per la cifra delle unità, mentre mi restano altre sei cifre tra cui scegliere le altre tre: $3 \cdot D_{6,3} = 3 \cdot \frac{6!}{3!} = \mathbf{360}$

Per determinare i numeri dispari, basta sottrarre da tutti i numeri possibili i numeri pari: $840 - 360 = \mathbf{480}$

Bloccata la cifra delle unità (con il 2), mi restano 6 cifre tra cui scegliere le restanti 3: $D_{6,3} = \frac{6!}{3!} = \mathbf{120}$

Per ottenere numeri maggiori di 6000 devo bloccare la cifra delle migliaia con 6 o 7, dopodiché mi restano altre sei cifre tra cui scegliere le altre tre: $2 \cdot D_{6,3} = 2 \cdot \frac{6!}{3!} = \mathbf{240}$

15. L'insegnante di storia oggi vuole interrogare quattro studenti, tra cui Paolo e Andreina. Se le possibili quaterne di interrogati sono 276, quanti sono gli alunni della classe?

Avendo già scelto due studenti, me ne restano due da scegliere, tra gli n studenti della classe. Si tratta di una combinazione:

$$C_{n,2} = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{n\,(n-1)(n-2)!}{2\,(n-2)!} = \frac{1}{2}n\,(n-1) = 276 \qquad n^2 - n - 552 = 0 \qquad n_{1,2} = \frac{1 \pm 47}{2} = \left\langle \begin{matrix} 24 \\ -23 \end{matrix} \right.$$

Escludendo la soluzione negativa e aggiungendo i due studenti già scelti a quelli ottenuti, troviamo **26** studenti.

16. Quanti sono gli anagrammi, anche senza significato, della parola CALCOLATRICE? Quanti cominciano per C? Quanti finiscono per TRICE?

Nella parola CALCOLATRICE ho 12 lettere con la C che si ripete 3 volte, la A 2 volte e la L 2 volte $\frac{12!}{3!\,2!\,2!} = \mathbf{19\,958\,400}$

Nella parola ALCOLATRICE ho 11 lettere con la C che si ripete 2 volte, la A 2 volte e la L 2 volte $\frac{11!}{2!\,2!\,2!} = \mathbf{4\,989\,600}$

Nella parola CALCOLA ho 7 lettere con la C che si ripete 2 volte, la A 2 volte e la L 2 volte $\frac{7!}{2!\,2!\,2!} = \mathbf{630}$