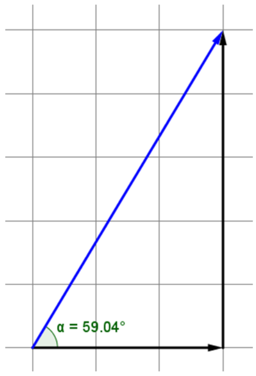
1. Guidi un'automobile per 1500 m verso est e poi per 2500 m verso nord. Se il viaggio è durato 3,00 minuti, quali sono stati il modulo e la direzione della tua velocità media?

$x = 1500\ m \qquad y = 2500\ m \qquad t = 3{,}00\ min \qquad v?$

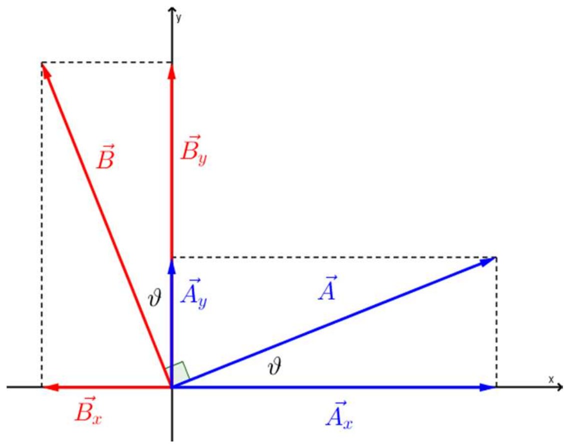



$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{x}{t}\right)^2 + \left(\frac{y}{t}\right)^2} = \mathbf{16,2\ m/s}$$

L'angolo che il vettore velocità forma con la direzione EO (ovvero con l'asse orizzontale) è lo stesso che forma il vettore spostamento, perciò viene più comodo procedere con x e y:

$$y = x\, tg\, \alpha \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = tg^{-1}\frac{y}{x} = \mathbf{59,0°}$$

2. Un vettore $\vec{A}$ e un vettore $\vec{B}$ sono fra loro perpendicolari e hanno lo stesso modulo. Quale relazione lega le componenti dei due vettori?




Considero innanzi tutto le componenti del vettore $\vec{A}$:

$$A_x = A\cos\vartheta \qquad A_y = A\, sen\,\vartheta$$

Come si evince dal disegno, l'angolo formato dal vettore $\vec{A}$ con l'asse x è congruente all'angolo formato dal vettore $\vec{B}$ con l'asse y, perché entrambi complementari dell'angolo formato dal vettore $\vec{A}$ con l'asse y. Perciò, le componenti del vettore $\vec{B}$ sono:

$$B_x = -B\, sen\,\vartheta \qquad B_y = B\cos\vartheta$$

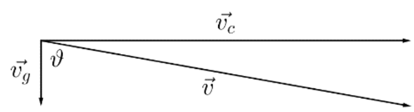
Visto che i due vettori hanno lo stesso modulo, si può concludere:

$$\boldsymbol{A_x = B_y} \qquad \boldsymbol{A_y = -B_x}$$

3. Sei a bordo di un camper che si muove di moto rettilineo uniforme alla velocità di 80 km/h, quando inizia a piovere. Se noti che le gocce d'acqua lasciano sui finestrini laterali tracce inclinate di 80° rispetto alla verticale, qual è la loro velocità rispetto al camper in movimento? Se, a camper fermo, osservi che la pioggia cade verticalmente, qual è la velocità delle gocce rispetto al suolo?

$v_c = 80\ km/h \qquad \vartheta = 80° \qquad v? \qquad v_g?$

$$v_c = v\, sen\,\vartheta \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{v_c}{sen\,\vartheta} = \mathbf{81\ km/h}$$




$$v_g = \sqrt{v^2 - v_c^2} = \mathbf{14\ km/h}$$

4. Lanci una palla da un'altezza di 9,0 m per colpire un bersaglio che è posto a una distanza orizzontale di 3,5 m dal punto di lancio. Se la palla viene lanciata orizzontalmente, quale velocità iniziale devi imprimere per centrare il bersaglio?

Le equazioni del moto sono: $\begin{cases} x = v_o t \\ y = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

Determino il tempo di volo della palla, risolvendo la seconda equazione con $y = 0$: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Sostituisco nella prima equazione e, dalla distanza percorsa in orizzontale, ricavo la velocità orizzontale:

$$G = v_o t \qquad \Rightarrow \qquad v_o = \frac{G}{t} = G\sqrt{\frac{g}{2h}} = \mathbf{2,6\ m/s}$$

5. Un nuotatore si tuffa orizzontalmente da un trampolino con una velocità iniziale di modulo 3,32 m/s e tocca l'acqua a una distanza orizzontale di 1,78 m dalla fine del trampolino.
   A. A quale altezza rispetto all'acqua si trova il trampolino?
   B. Se il nuotatore si tuffa con una velocità minore, impiega più tempo, meno tempo o lo stesso tempo per raggiungere l'acqua? Motiva la tua risposta.
   C. Se raddoppia la velocità iniziale, come cambia la distanza percorsa in orizzontale, supponendo che il nuotatore si tuffi sempre dallo stesso trampolino?

A. Le equazioni del moto sono: $\begin{cases} x = v_o t \\ y = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$

Ricavo il tempo dalla prima equazione, usando la gittata al posto di x e determino l'altezza di partenza del sasso, risolvendo la seconda equazione con $y = 0$:

$$G = v_o t \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{G}{v_o} \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} g \left(\frac{G}{v_o}\right)^2 = \mathbf{1,41\ m}$$

B. Se il nuotatore si tuffa con velocità minore, considerato che la velocità in questione è quella orizzontale, il tempo è lo stesso per raggiungere l'acqua, perché in verticale si tratta sempre di moto uniformemente accelerato con partenza da fermo, ovvero l'equazione del moto verticale è comunque: $y = h - \frac{1}{2} g t^2$.

C. Se la velocità orizzontale raddoppia, raddoppia anche la gittata, perché il tempo non cambia (visto che l'altezza non cambia e visto quanto detto al punto precedente), perciò:

$$G_2 = (2v_o)t = 2\,(v_o t) = 2G$$

6. Un cannone è inclinato di 40° rispetto all'orizzontale. Esso spara un proiettile che ha una velocità iniziale di 250 m/s.
   A. Calcola la quota che raggiunge il proiettile.
   B. Stabilisci quanto vale il rapporto tra le due velocità iniziali, se in un secondo lancio raddoppi la quota, mantenendo costante l'angolo.
   C. Determina la gittata.
   D. Stabilisci quanto vale il rapporto tra le due velocità iniziali, se in un secondo lancio dimezzi la gittata, mantenendo costante l'angolo.

A. Le equazioni del moto sono: $\begin{cases} x = v_{ox}t \\ y = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$

Determino il tempo di volo del pallone, risolvendo la seconda equazione con $y = 0$:

$$v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_v = \frac{2\,v_{oy}}{g}$$

L'altro risultato, $t = 0s$, è quello della partenza, quando il pallone si trova allo stesso livello a cui arriverà dopo il lancio.
Durante il volo, il pallone raggiunge l'altezza massima a metà del suo percorso, perciò sostituendo un tempo di volo che è la metà di quello trovato e sostituendolo nella seconda equazione, quella dello spostamento verticale, ottengo l'altezza massima raggiunta:

$$h_{max} = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{v_{oy}^2}{g} - \frac{1}{2}g\frac{v_{oy}^2}{g^2} = \frac{v_{oy}^2}{2g} = \frac{v_o^2\,sen^2\alpha}{2g} = \mathbf{1,32\ km}$$

B.

$$h_{m2} = 2h_m \qquad \Rightarrow \qquad \frac{v_{o2}^2 sen^2\alpha}{2g} = 2\frac{v_{o1}^2 sen^2\alpha}{2g} \qquad \Rightarrow \qquad v_{o2}^2 = 2\,v_{o1}^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{v_{o2}}{v_{o1}} = \sqrt{2}$$

C. Avendo già il tempo di volo, ricavato al primo punto, posso ricavare la gittata sostituendo il tempo nella prima equazione:

$$G = v_{ox}t_V = v_o\cos\alpha\ \frac{2\,v_o\ sen\ \alpha}{g} = \mathbf{6,28\ km}$$

D.

$$G_2 = \frac{1}{2}G_1 \qquad \Rightarrow \qquad v_{o2}^2\frac{2\cos\alpha\ \ sen\ \alpha}{g} = \frac{1}{2}v_{o1}^2\frac{2\cos\alpha\ \ sen\ \alpha}{g} \qquad \Rightarrow \qquad v_{o2}^2 = \frac{1}{2}v_{o1}^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{v_{o2}}{v_{o1}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$$