1. Un kilowattora di energia costa in media $0{,}20$ euro. Decidi di sostituire una lampadina da $100\ W$ con una da $12\ W$ a risparmio energetico nella tua camera. La lampadina resta accesa circa $3{,}0$ ore al giorno. A quanto ammonta il risparmio sulla bolletta dell'energia elettrica nell'arco di un mese?

$$c = 0{,}20\ €/kWh \qquad P_1 = 100\ W \qquad P_2 = 12\ W \qquad \Delta t = 3{,}0\ h/d \qquad \Delta t_2 = 30\ d \qquad R?$$

La potenza è data dal rapporto tra l'energia e l'intervallo di tempo, perciò l'energia è data dal prodotto tra la potenza e l'intervallo di tempo, quello di 3,0 ore al giorno. In questo modo, ottengo il consumo energetico misurato in kWh e, moltiplicando la differenza di spesa di ogni singolo giorno per 30, ottengo il risparmio di un mese:

$$R = 0{,}20\ €/kWh \cdot (P_1 - P_2) \cdot \Delta t_1 \cdot \Delta t_2 = \mathbf{1{,}6\ €}$$

2. Una bobina elettrica riscaldante è immersa in $4{,}6\ kg$ di acqua a $22°C$. La bobina, che ha una resistenza di $250\ \Omega$ riscalda l'acqua fino a $32°C$ in 15 minuti. A quale differenza di potenziale è connessa la bobina?

$$m = 4{,}6\ kg \qquad T_1 = 22°C \qquad R = 250\ \Omega \qquad T_2 = 32°C \qquad c = 4186\ J/(kg°C) \qquad \Delta t = 900\ s \qquad V?$$

Combino la definizione di potenza elettrica e la prima legge di Ohm:
$$\begin{cases} P = iV \\ V = iR \end{cases} \qquad \begin{cases} P = iV \\ i = \dfrac{V}{R} \end{cases} \qquad P = \frac{V^2}{R}$$

La potenza è il rapporto tra energia e intervallo di tempo, ma l'energia, in questo caso, è il calore, dato dalla legge della termologia:
$$\begin{cases} P = \dfrac{Q}{\Delta t} \\ Q = mc(T_2 - T_1) \end{cases}$$

Eguagliando le due espressioni della potenza, ottengo la differenza di potenziale richiesta:
$$\frac{Q}{\Delta t} = \frac{V^2}{R} \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{\frac{QR}{\Delta t}} = \sqrt{\frac{Rmc(T_2 - T_1)}{\Delta t}} = \mathbf{2{,}3 \cdot 10^2\ V}$$

3. Un filo di composizione ignota ha una resistenza pari a $30\ \Omega$ quando si trova a temperatura ambiente $(25°C)$. Quando viene immerso in acqua bollente la sua resistenza aumenta fino al valore di $50\ \Omega$. Calcola la temperatura di una giornata in cui la sua resistenza assume il valore di $34\ \Omega$.

$$R_1 = 30\ \Omega \qquad T_1 = 25°C \qquad R_2 = 50\ \Omega \qquad T_2 = 100°C \qquad R_3 = 34\ \Omega \qquad T_3?$$

La resistenza di un filo cambia con la temperatura secondo la relazione: $R_2 = R_1\,[1 + \alpha\,(T_2 - T_1)]$

Posso ricavare il coefficiente di temperatura della resistività in funzione delle resistenze e delle temperature:
$$\alpha = \frac{\frac{R_2}{R_1} - 1}{T_2 - T_1}$$

Riscrivendo la prima relazione con la terza resistenza in funzione della terza temperatura, posso ricavare l'espressione della temperatura:
$$R_3 = R_1\,[1 + \alpha\,(T_3 - T_1)] \quad \Rightarrow \quad T_3 = T_1 + \frac{\frac{R_3}{R_1} - 1}{\alpha}$$

Sostituendo l'espressione del coefficiente di temperatura, posso determinare la temperatura richiesta a partire dai dati:
$$T_3 = T_1 + \frac{\frac{R_3}{R_1} - 1}{\left(\frac{\frac{R_2}{R_1} - 1}{T_2 - T_1}\right)} = T_1 + \frac{R_3 - R_1}{R_2 - R_1} \cdot (T_2 - T_1) = \mathbf{40°C}$$

4. Un alimentatore con forza elettromotrice dichiarata di $12\ V$ è collegato a un resistore di resistenza $7{,}5\ \Omega$. Il circuito è attraversato da una corrente di $1{,}3\ A$. Quanta potenza è dissipata dalla resistenza interna del generatore?

$$\mathcal{E} = 12\ V \qquad R = 7{,}5\ \Omega \qquad \mathrm{i} = 1{,}3\ \mathrm{A} \qquad P_r?$$

La forza elettromotrice fornita dalla batteria viene, in parte, dispersa per effetto della resistenza interna della batteria, che aggiunge una piccola resistenza al circuito. Per questo motivo, se indico con r la resistenza interna dell'alimentatore, la differenza di potenziale ai capi del resistore, che genera la corrente indicata, è data da: $V = \mathcal{E} - ri$

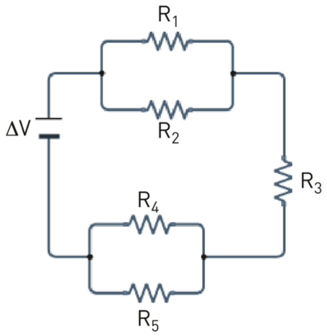
Perciò:

$$V = \mathcal{E} - ri \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\mathcal{E} - V}{i} \quad \Rightarrow \quad P_r = Vi = ri^2 = i(\mathcal{E} - V) = i(\mathcal{E} - iR) = \mathbf{2{,}9\ W}$$

5. La resistenza equivalente di un circuito è data da

$$R_{eq} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + \frac{R_4R_5}{R_4 + R_5}$$

Supponi che i valori delle resistenze siano $R_1 = 600\ \Omega$, $R_2 = 400\ \Omega$, $R_3 = 200\ \Omega$, $R_4 = R_5 = 120\ \Omega$ e la corrente totale valga $440\ mA$. Dopo aver disegnato il circuito corrispondente, calcola il valore della differenza di potenziale del generatore presente nel circuito.



$$R_1 = 600\ \Omega \qquad R_2 = 400\ \Omega \qquad R_3 = 200\ \Omega \qquad R_4 = R_5 = 120\ \Omega \qquad i = 440\ mA \qquad \Delta V?$$

Il circuito corrispondente alla resistenza equivalente data è rappresentato a lato: le resistenze R_1 e R_2, come pure R_4 e R_5 sono collegate in parallelo, infatti:

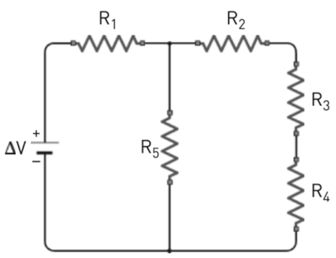
$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} = \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2}\right)^{-1} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$$

I due collegamenti in parallelo sono in serie con R_3, come si può intuire dal fatto che vengono sommate.

Per la prima legge di Ohm:

$$\Delta V = iR_{eq} = \mathbf{220\ V}$$

6. Il circuito in figura 1 contiene un generatore che mantiene una differenza di potenziale di $80\ V$ e cinque resistenze che valgono $R_1 = 80\ \Omega$, $R_2 = R_4 = 10\ \Omega$, $R_3 = 20\ \Omega$, $R_5 = 40\ \Omega$. Determina la differenza di potenziale ai capi di ogni resistenza.



$$\Delta V = 80\ V \qquad R_1 = 80\ \Omega \qquad R_2 = R_4 = 10\ \Omega \qquad R_3 = 20\ \Omega \qquad R_5 = 40\ \Omega$$

$$\Delta V_1? \qquad \Delta V_2? \qquad \Delta V_3? \qquad \Delta V_4? \qquad \Delta V_5?$$

Risolvo il circuito: le resistenze R_2, R_3 e R_4 sono collegate in serie, ma insieme sono in parallelo con R_5. Infine, il sistema delle quattro resistenze è in serie con R_1, perciò la resistenza equivalente è:

$$R_{eq} = \left(\frac{1}{R_2 + R_3 + R_4} + \frac{1}{R_5}\right)^{-1} + R_1$$

Con la prima legge di Ohm posso determinare la corrente che circola nel circuito con la resistenza equivalente: $\Delta V = iR_{eq} \ \Rightarrow \ i = \dfrac{\Delta V}{R_{eq}}$

La corrente che circola nell'intero circuito è quella che circola anche nella prima resistenza, perciò posso determinare la differenza di potenziale ai suoi capi:

$$\Delta V_1 = iR_1 = \frac{\Delta V}{R_{eq}} \cdot R_1 = \mathbf{64\ V}$$

Questo mi permette di determinare la differenza di potenziale ai capi di R_5, infatti:

$$\Delta V_5 = \Delta V - \Delta V_1 = \mathbf{16\ V}$$

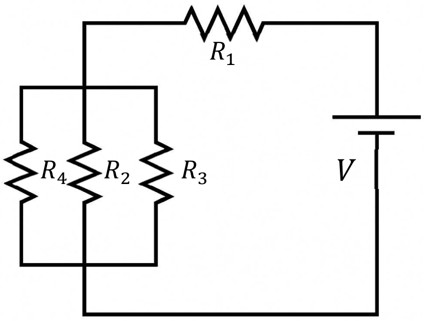
La resistenza nel ramo di circuito con le tre resistenze è $R_2 + R_3 + R_4 = 40\ \Omega$, uguale alla resistenza R_5, e dato che $i = i_{234} + i_5$ per la legge dei nodi, dove ho indicato con i_{234} la corrente che circola in R_2, R_3 e R_4:

$$i_2 = i_3 = i_4 = i_5 = \frac{1}{2}i$$

Posso, quindi, determinare le differenze di potenziale richieste:

$$\Delta V_2 = \frac{1}{2}i \cdot R_2 = \mathbf{4{,}0\ V} \qquad \Delta V_3 = \frac{1}{2}i \cdot R_3 = \mathbf{8{,}0\ V} \qquad \Delta V_4 = \frac{1}{2}i \cdot R_4 = \mathbf{4{,}0\ V}$$

7. Il circuito nella figura 2 è alimentato da un generatore che eroga una tensione di $24{,}0\ V$. Calcola le intensità di corrente che attraversano ogni resistore.



$$V = 24{,}0\ V \qquad R_1 = 6{,}00\ \Omega \qquad R_2 = 8{,}00\ \Omega \qquad R_3 = 12{,}0\ \Omega \qquad R_4 = 10{,}0\ \Omega$$
$$i_1? \quad i_2? \quad i_3? \quad i_4?$$

Posso ridisegnare il circuito, evidenziando i collegamenti tra le resistenze. La corrente che circola nella resistenza R_1 è la stessa che circola nel circuito. Per determinarla, calcolo la resistenza equivalente e applico la legge di Ohm:

$$R_{eq} = R_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)^{-1} \qquad V = iR_{eq} \quad \Rightarrow \quad i_1 = i = \frac{V}{R_{eq}} = \mathbf{2{,}60\ A}$$

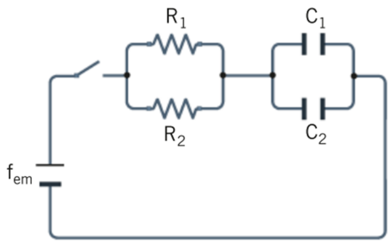
Le resistenze collegate in parallelo hanno la stessa differenza di potenziale, perciò: $V_2 = V_3 = V_4 = V'$

La resistenza R_1 è collegata in serie con le altre resistenze, perciò: $V' + V_1 = V$

Con la prima legge di Ohm posso determinare V_1 e, quindi, la differenza di potenziale delle altre tre resistenze: $V' = V - i_1 R_1$

Posso, quindi, determinare le correnti richieste: $\mathrm{i}_2 = \frac{V'}{R_2} = \mathbf{1{,}05\ A}$ $\quad \mathrm{i}_3 = \frac{V'}{R_3} = \mathbf{0{,}70\ A}$ $\quad \mathrm{i}_4 = \frac{V'}{R_4} = \mathbf{0{,}84\ A}$

8. Nel circuito RC della figura 3, la resistenza R_2 è in parallelo con la resistenza R_1 ed è tale che $R_2 = nR_1$, dove n è un numero naturale maggiore di zero. La capacità C_2, in parallelo alla capacità C_1, è uguale a $C_2 = mC_1$, dove m è un numero naturale maggiore di zero. Trova i valori di n e m tali che il tempo caratteristico del circuito sia uguale a $2R_1C_1$.



$$R_2 = nR_1 \qquad C_2 = mC_1 \qquad \tau = 2R_1C_1 \qquad n? \qquad m?$$

Dato che le due resistenze sono collegate in parallelo, la resistenza totale è:

$$R = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{nR_1}\right)^{-1} = \left(\frac{n+1}{nR_1}\right)^{-1} = \frac{n}{n+1} R_1$$

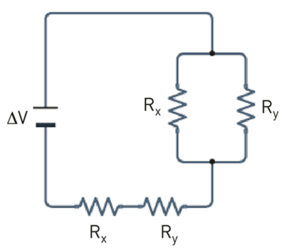
Dato che i due condensatori sono collegati in parallelo, la capacità totale è:

$$C = C_1 + C_2 = C_1 + mC_1 = (m+1)\,C_1$$

Il tempo caratteristico finale è: $\tau = RC = \frac{n}{n+1} R_1 \cdot (m+1)\,C_1$

Sapendo che $\tau = 2R_1C_1$, posso determinare le coppie di valori di n e m $\quad m + 1 = 2 \cdot \frac{n+1}{n}$ $\quad \boldsymbol{n = 1 \quad m = 3}$; $\boldsymbol{n = 2 \quad m = 2}$

9. Un alimentatore che mantiene una differenza di potenziale costante $\Delta V = 22\ V$ ai suoi morsetti è collegato a quattro resistori di resistenze incognite R_x e R_y disposti come mostrato nella figura 4. La corrente erogata dal generatore è $2{,}0\ A$. Nel tratto del circuito in cui le due resistenze sono in parallelo, la corrente che attraversa R_x ha valore doppio rispetto alla corrente che attraversa R_y. Determina le resistenze R_x e R_y.



$$\Delta V = 22\ V \qquad i = 2{,}0\ A \qquad i_x = 2i_y \qquad R_x? \qquad R_y?$$

Le due resistenze in parallelo hanno la stessa differenza di potenziale, perciò, applicando la prima legge di Ohm:

$$i_x R_x = i_y R_y \quad \Rightarrow \quad 2i_y R_x = i_y R_y \quad \Rightarrow \quad R_y = 2R_x$$

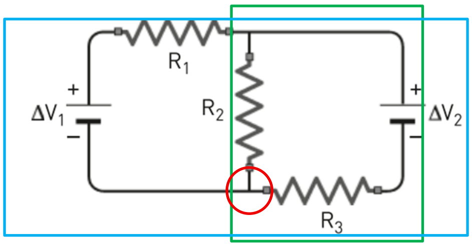
Determino, quindi, la resistenza equivalente del circuito:

$$R_{eq}=\left(\frac{1}{R_x}+\frac{1}{R_y}\right)^{-1}+R_x+R_y=\left(\frac{1}{R_x}+\frac{1}{2R_x}\right)^{-1}+R_x+2R_x=\frac{2}{3}R_x+3R_x=\frac{11}{3}R_x$$

Applico la prima legge di Ohm, per determinare il valore della resistenza equivalente: $\Delta V=iR_{eq} \quad \Rightarrow \quad R_{eq}=\frac{\Delta V}{i}$

Applico le equivalenze appena trovate per determinare il valore delle due resistenze: $R_x=\frac{3}{11}R_{eq}=\frac{3}{11}\cdot\frac{\Delta V}{i}=\mathbf{3,0\ \Omega}$ $\qquad R_y=2R_x=\mathbf{6,0\ \Omega}$

10. Nel circuito mostrato nella figura seguente, le differenze di potenziale mantenute dai due generatori ideali valgono $\Delta V_1=12\ V$ e $\Delta V_2=24\ V$. Le resistenze dei tre resistori valgono $R_1=10\ \Omega$, $R_2=20\ \Omega$, $R_3=30\ \Omega$. Calcola l'intensità della corrente erogata dal generatore ΔV_2.



$\Delta V_1=12\ V \qquad \Delta V_2=24\ V \qquad R_1=10\ \Omega \qquad R_2=20\ \Omega \qquad R_3=30\ \Omega$

Le tre correnti nel circuito sono:

- i_1, che passa in R_1 e circola in senso orario;
- i_2, che passa in R_2, circolando dall'alto verso il basso;
- i_3, che passa in R_3 e circola in senso antiorario.

Bisogna determinare i_3.

Applico le leggi di Kirchhoff alle due maglie indicate una in verde (prima equazione) e una in azzurro (seconda equazione), e la legge di Kirchhoff dei nodi, nel nodo indicato in rosso, in cui ho la corrente i_2 entrante e le altre due uscenti:

$$\begin{cases}\Delta V_2-i_2R_2-i_3R_3=0\\ \Delta V_1-i_1R_1-\Delta V_2+i_3R_3=0\\ i_2=i_1+i_3\end{cases} \qquad \begin{cases}i_2=\dfrac{\Delta V_2-i_3R_3}{R_2}\\ i_1=\dfrac{\Delta V_1-\Delta V_2+i_3R_3}{R_1}\\ \dfrac{\Delta V_2-i_3R_3}{R_2}=\dfrac{\Delta V_1-\Delta V_2+i_3R_3}{R_1}+i_3\end{cases}$$

Procedo con la soluzione della terza equazione:

$$R_1\Delta V_2-i_3R_1R_3=R_2\Delta V_1-R_2\Delta V_2+i_3R_2R_3+i_3R_1R_2 \quad \Rightarrow \quad i_3=\frac{R_1\Delta V_2-R_2\Delta V_1+R_2\Delta V_2}{R_1R_3+R_2R_3+R_1R_2}=\mathbf{0,44\ A}$$