1. Un tubo di $1{,}1\ cm$ di diametro si allarga fino a $2{,}5\ cm$. Un liquido scorre attraverso il primo segmento a una velocità di $4{,}3\ m/s$. Qual è la velocità nel secondo segmento? Qual è la portata volumetrica nel tubo?

$$d_1 = 1{,}1\ cm \qquad d_2 = 2{,}5\ cm \qquad v_1 = 4{,}3\ m/s \qquad v_2? \qquad Q_2?$$

Applicando l'equazione di continuità, è possibile determinare la velocità nel secondo segmento:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} = v_1 \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = v_1 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = \mathbf{0,83\ m/s}$$

Per definizione la portata è data da: $Q = Av = \pi r_1^2 v_1 = \frac{1}{4}\pi d_1^2 v_1 = \mathbf{4,1 \cdot 10^{-4}\ m^3/s}$.

2. Due cisterne sono riempite con acqua fino a un'altezza rispettivamente h_1 e $h_2 = 2h_1$. Se viene praticato un foro sul fondo delle cisterne, qual è la relazione fra le velocità di efflusso v_1 e v_2?

La velocità di fuoriuscita del fluido, per il teorema di Torricelli, è data dalla formula: $v = \sqrt{2gh}$, dove h è il dislivello tra il pelo dell'acqua e il foro di uscita. Applicandolo in questo caso, ottengo:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{2gh_1}}{\sqrt{2gh_2}} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} = \sqrt{\frac{h_1}{2h_1}} = \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$$

3. Dell'acqua scorre in un tubo orizzontale di diametro $2{,}8\ cm$ che è collegato a un secondo tubo orizzontale di diametro $1{,}6\ cm$. La differenza di pressione fra i due tubi è di $7{,}5\ kPa$.
   A. Scrivi la velocità di flusso del secondo tubo in funzione delle sezioni e stabilisci in quale dei due tubi la velocità è maggiore.
   B. Scrivi la differenza di pressione $p_2 - p_1$ tra i due tubi in funzione della differenza di velocità nei due tubi e stabilisci in quale tubo la pressione è maggiore.
   C. Calcola la velocità di flusso nel primo tubo.

$$d_1 = 2{,}8\ cm \qquad d_2 = 1{,}6\ cm \qquad \rho = 1000\ kg/m^3 \qquad |\Delta p| = 7{,}5\ kPa \qquad v_1?$$

A. Per l'equazione di continuità: $A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} = v_1 \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = v_1 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$. Dato che $d_1 > d_2$, allora $\boldsymbol{v_2 > v_1}$.

B. Per l'equazione di Bernoulli: $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$. Visto che il tubo è orizzontale: $h_1 = h_2$, perciò:

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \frac{1}{2}\rho v_2^2 = \frac{1}{2}\rho\,(v_1^2 - v_2^2)$$

Come stabilito al punto precedente $v_2 > v_1$, perciò: $p_1 - p_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{p_2 < p_1}$.

C. Dalle due relazioni, posso determinare la velocità richiesta:

$$\begin{cases} v_2 = v_1 \left(\dfrac{d_1}{d_2}\right)^2 \\ p_2 - p_1 = \dfrac{1}{2}\rho\,(v_1^2 - v_2^2) \end{cases} \qquad \frac{2}{\rho}(p_2 - p_1) = v_1^2 - v_1^2 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 \qquad v_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho\left(1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4\right)}} = \mathbf{1,3\ m/s}$$

4. Quale velocità deve avere una sfera d'oro di raggio $3{,}00\ mm$ immersa nell'olio di ricino affinché la forza di attrito viscoso sia pari a un quarto del peso della sfera? (La densità dell'oro è $19300\ kg/m^3$ e il coefficiente di viscosità dell'olio di ricino è $0{,}986\ N\ s/m^2$).

$$R = 3{,}0\ mm \qquad F_A = \frac{1}{4}P \qquad d_o = 19300\ kg/m^3 \qquad \eta = 0{,}986\ Ns/m^2 \qquad v?$$

La forza di attrito è data, in modulo, dalla formula di Stokes: $F_A = 6\pi\eta R v$.

$$6\pi\eta R v = \frac{1}{4}mg \quad \Rightarrow \quad 6\pi\eta R v = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 d_o g \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{18\,\eta}R^2 d_o g = \mathbf{9,60\ cm/s}$$

5. Una tanica, riempita d'acqua fino a un'altezza H, ha un buco sulla superficie laterale a un'altezza h al di sopra del tavolo sul quale è posta. Dimostra che l'acqua che esce dal buco cade sul tavolo a una distanza orizzontale pari a $2\sqrt{(H-h)\,h}$ dalla base della tanica.

Per il teorema di Torricelli, $v=\sqrt{2gh}$, dove h è la distanza tra il pelo dell'acqua e il foro di uscita. In questo caso, quindi, la velocità diventa: $v=\sqrt{2g\,(H-h)}$. La caduta dell'acqua avviene con un moto parabolico che ha una velocità orizzontale in partenza, quella data dal teorema di Torricelli, che si mantiene costante durante il moto di caduta. In verticale, la caduta avviene con un moto uniformemente accelerato, perciò:

$$h=\frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Stabilito il tempo di volo, la distanza percorsa in orizzontale (con un moto rettilineo uniforme), è data dal prodotto tra il tempo e la velocità, perciò:

$$s=vt=\sqrt{2g\,(H-h)}\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}=2\sqrt{h(H-h)}$$