1. Al variare del parametro reale k, studia la natura delle coniche del fascio di equazione:

$$x^2 + (k^2-1)y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$$

Scrivo l'equazione del fascio in forma canonica:

$$(x^2-2x+1) + (k^2-1)\left(y^2 - \frac{4}{k^2-1}y + \frac{4}{(k^2-1)^2}\right) = -3 + 1 + \frac{4}{k^2-1}$$

$$(x-1)^2 + (k^2-1)\left(y - \frac{2}{k^2-1}\right)^2 = \frac{-2k^2+6}{k^2-1}$$

L'equazione data rappresenta una conica:

Se $\frac{-2k^2+6}{k^2-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad k \pm \sqrt{3}$: l'equazione rappresenta una conica degenere

Se $k^2 - 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{-1 < k < 1}$: l'equazione rappresenta un'**iperbole**

In particolare: se $k^2 - 1 = -1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k = 0}$, l'equazione rappresenta un'**iperbole equilatera**

Se $k^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k = \pm 1}$: l'equazione rappresenta una **parabola**

Se $k^2 - 1 > 0$, l'equazione rappresenta un'ellisse e, dato che i coefficienti dei termini di secondo grado, sono entrambi positivi, deve essere positivo anche il termine noto, perciò:

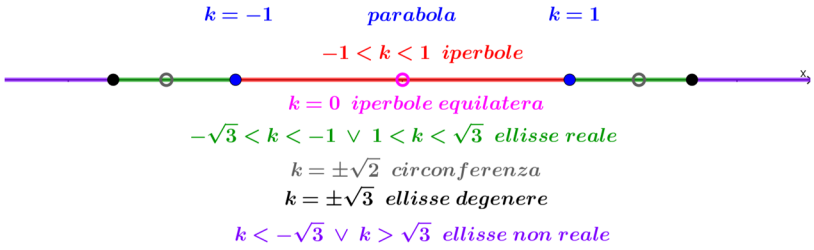
$$\begin{cases} k^2 - 1 > 0 \\ \dfrac{-2k^2+6}{k^2-1} > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k < -1 \quad \vee \quad k > 1 \\ -\sqrt{3} < k < -1 \quad \vee \quad 1 < k < \sqrt{3} \end{cases}$$

Se $\mathbf{-\sqrt{3} < k < -1 \ \vee \ 1 < k < \sqrt{3}}$, l'equazione rappresenta un'**ellisse reale**

In particolare: se $k^2 - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k = \pm\sqrt{2}}$, l'equazione rappresenta una **circonferenza**

Se $\mathbf{k \pm \sqrt{3}}$: l'equazione rappresenta un'**ellisse degenere**

Se $\mathbf{k < -\sqrt{3} \ \vee \ k > \sqrt{3}}$, l'equazione rappresenta un'**ellisse non reale**



2. Determina per quale valore di k l'equazione $x^2 - ky^2 - 3x - 2y - 4 = 0$ è rappresentata da due rette.

Perché l'equazione sia rappresentata da due rette, deve trattarsi di una conica degenere:

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} - k\left(y^2 + \frac{2}{k}y + \frac{1}{k^2}\right) = 4 + \frac{9}{4} - \frac{1}{k} \quad \Rightarrow \quad 4 + \frac{9}{4} - \frac{1}{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k} = \frac{25}{4} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k = \frac{4}{25}}$$

La conica risultante è un'iperbole degenere:

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{4}{25}\left(y^2 + \frac{25}{2}y + \frac{625}{16}\right) = 4 + \frac{9}{4} - \frac{25}{4} \qquad \left(x - \frac{4}{25}y - \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{4}{25}y - \frac{1}{2}\right) = 0$$

3. Scrivi l'equazione del luogo geometrico dei punti P per i quali il rapporto tra le distanze da $A(0,3)$ e dalla retta di equazione $y = -1$ è uguale a $\sqrt{2}$.

Sia P un punto generico di coordinate $P(x;y)$, pongo il rapporto tra le distanze date uguale a $\sqrt{2}$:

$$\frac{\overline{PA}}{d(P; y=-1)} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = \sqrt{2}\,|y+1| \quad \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = 2y^2 + 4y + 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x^2 - y^2 - 10y + 7 = 0}$$

4. Determina l'equazione cartesiana del luogo descritto dai centri delle iperboli del seguente fascio: $y = \frac{kx-1}{(k+2)\,x+3}$

Si tratta di un fascio di funzioni omografiche di generico centro: $C\left(-\frac{3}{k+2}; \frac{k}{k+2}\right)$. Perciò, indicate le due coordinate in funzione del parametro, ricavo il parametro in funzione di una delle variabili e determino così l'equazione cartesiana:

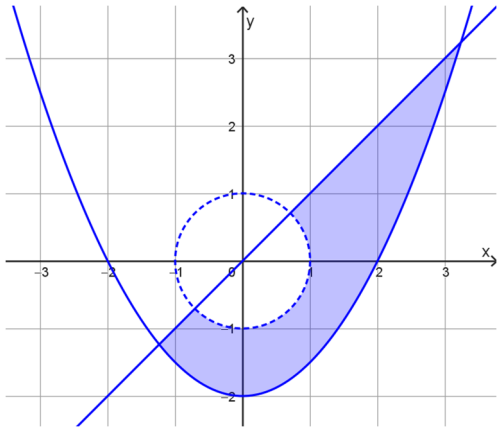
$$\begin{cases} x = -\dfrac{3}{k+2} \\ y = \dfrac{k}{k+2} \end{cases} \qquad \begin{cases} k+2 = -\dfrac{3}{x} \\ y = \dfrac{-\frac{3}{x} - 2}{-\frac{3}{x}} \end{cases} \qquad y = \frac{2x+3}{3} \qquad y = \frac{2}{3}x + 1$$

Il luogo è una retta, con l'esclusione di alcuni punti: $x \neq 0$, come si evince dall'equazione che lega x e k. Devo escludere anche il valore del parametro per cui il fascio non rappresenta un'iperbole e, quindi, il corrispondente valore della x:

$$3k + k + 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad k \neq -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x \neq -\frac{3}{-\frac{1}{2}+2} \quad \Rightarrow \quad x \neq -2$$

Perciò: $\boldsymbol{y = \frac{2}{3}x + 1 \; con \; x \neq 0 \;\wedge\; x \neq -2}$.

5. Scrivi una rappresentazione analitica della parte di piano colorata:



La parabola ha vertice nel punto $V(0,-2)$ e asse di simmetria coincidente con l'asse y, perciò ha generica equazione $y = ax^2 - 2$. Sostituisco le coordinate del punto $(2,0)$ e determino il parametro:

$$0 = 4a - 2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x^2 - 2$$

Scelgo l'origine come punto di prova, appartenente all'area interna alla parabola:

$$y \geq \frac{1}{2}x^2 - 2$$

La circonferenza ha centro nell'origine e raggio 1. Ne considero solo la parte esterna, perciò:

$$x^2 + y^2 > 1$$

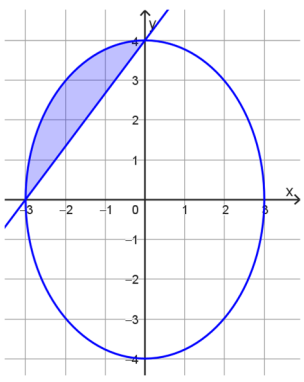
La retta rappresentata è la bisettrice di primo e terzo quadrante. Il punto $(1,0)$ appartiene alla regione colorata:

$$y = x \quad \wedge \quad 0 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad y \leq x$$

Concludendo:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y \geq \frac{1}{2}x^2 - 2} \\ \boldsymbol{x^2 + y^2 > 1} \\ \boldsymbol{y \leq x} \end{cases}$$

6. Determina l'area della regione di piano definita dal sistema di disequazioni: $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1 \\ y \geq \frac{4}{3}x + 4 \end{cases}$



La prima equazione rappresenta un'ellisse con i fuochi sull'asse y e semiassi $a = 3$ e $b = 4$. Ne coloro la parte interna.
La seconda equazione rappresenta un semipiano delimitato da una retta e, sostituendo le coordinate dell'origine come punto di prova, la disequazione non è verificata.
La parte di piano da considerare è quella rappresentata a fianco.

Per determinarne l'area, considero un quarto dell'ellisse – ovvero la parte situata nel secondo quadrante – e sottraggo l'area del triangolo rettangolo con vertici nell'origine e nei vertici dell'ellisse, $(-3,0)$ e $(0,4)$. Perciò:

$$\mathcal{A} = \frac{\pi ab}{4} - \frac{1}{2}ab = \boldsymbol{3\pi - 6}$$