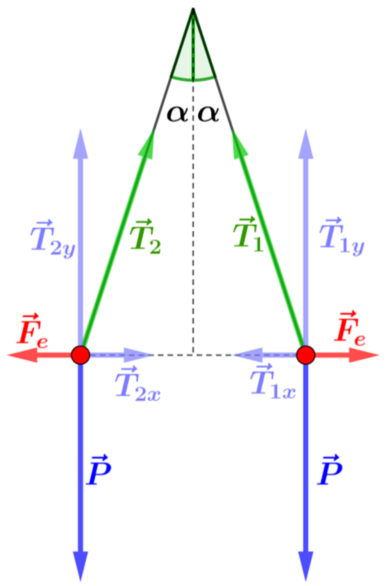
1. Due sferette identiche di massa $50\ mg$ cariche sono appese a due fili di lunghezza $10\ cm$. All'equilibrio i due fili formano un angolo di $36°$. Determina l'intensità della carica presente sulle sferette.



$$m = 50\ mg \qquad L = 0{,}10\ m \qquad 2\alpha = 36° \qquad q_1 = q_2 = q \qquad q?$$

Il diagramma delle forze rappresentato a lato ci dà un'idea di come procedere. Bisogna solo aggiungere che le due tensioni, T_1 e T_2, sono uguali, dato che le due sferette sono identiche e i due fili hanno la stessa lunghezza. Pertanto, le equazioni che risultano dalla **condizione di equilibrio** (somma delle forze agenti sulle sferette pari a zero) sono:

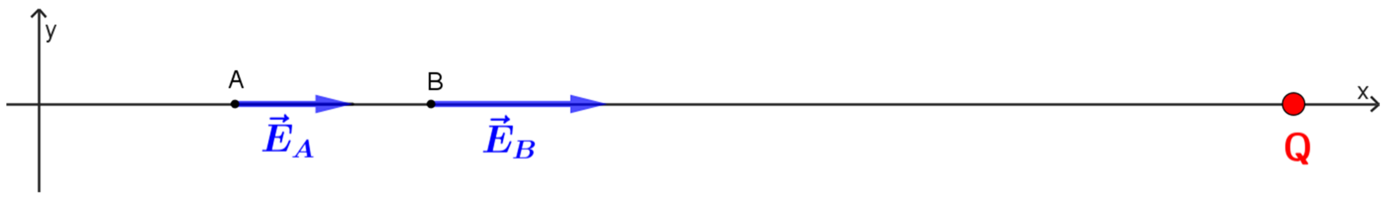
$$\begin{matrix} asse\ x: \\ asse\ y: \end{matrix} \begin{cases} F_e = T_x \\ T_y = P \end{cases} \qquad \begin{cases} k\dfrac{q^2}{4\,L^2 \sin^2\alpha} = T\sin\alpha \\ T\cos\alpha = mg \end{cases}$$

Ricavo la tensione dalla seconda equazione e la sostituisco nella prima, in modo da poter determinare l'intensità della carica richiesta:

$$\begin{cases} T = \dfrac{mg}{\cos\alpha} \\ q = 2L\sin\alpha\sqrt{\dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{mg}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha} \end{cases} \qquad \boldsymbol{q = 8{,}2\ nC}$$

2. Il campo elettrico nel punto $A(5{,}00\ cm; 0)$ punta nella direzione positiva dell'asse x e ha un'intensità di $10{,}0\ N/C$. Nel punto $B(10{,}0\ cm; 0)$ il campo elettrico punta nella direzione positiva dell'asse x e ha un'intensità di $15{,}0\ N/C$. Assumendo che tale campo elettrico sia prodotto da una singola carica puntiforme, determina la sua posizione, il suo segno e il suo valore.

$$A(5{,}00\ cm; 0) \qquad E_A = 10{,}0\ N/C \qquad B(10{,}0\ cm; 0) \qquad E_B = 15{,}0\ N/C \qquad Q? \qquad x_Q?$$



Dalla rappresentazione del campo elettrico illustrato nel testo, si evince che la carica sarà in una posizione $x > 10{,}0\ cm$ e avrà segno negativo, visto che il campo elettrico è diretto nel verso positivo dell'asse x e aumenta in modulo allontanandosi dall'origine. Indicata con x l'ascissa della carica Q, ottengo due relazioni che posso semplificare, sostituendo $x_B = 2x_A$ e $2E_B = 3E_A$:

$$\begin{cases} E_A = k\dfrac{|Q|}{(x-x_A)^2} \\ E_B = k\dfrac{|Q|}{(x-x_B)^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} k\,|Q| = E_A\,(x-x_A)^2 \\ E_B = E_A\dfrac{(x-x_A)^2}{(x-x_B)^2} \end{cases} \qquad \frac{x-x_A}{x-x_B} = \sqrt{\frac{E_B}{E_A}} \qquad x\sqrt{2} - x_A\sqrt{2} = x\sqrt{3} - x_B\sqrt{3}$$

$$x\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) = x_B\sqrt{3} - x_A\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x = x_A\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = x_A\left(4+\sqrt{6}\right) = \boldsymbol{32\ cm}$$

$$|Q| = \frac{E_A(x-x_A)^2}{k} \quad \Rightarrow \quad Q = \boldsymbol{-8{,}3\cdot 10^{-11}\ C}$$

3. Una sfera conduttrice uniformemente carica di raggio $1{,}5\ m$ ha una densità superficiale di carica di $7{,}8\ \mu C/m^2$.
   A. Qual è la carica sulla sfera?
   B. Determina il flusso del campo elettrico uscente dalla superficie della sfera.
   C. Determina il campo elettrico a $0{,}55\ m$ dal centro della sfera e a $5{,}5\ m$ dal centro della sfera.

$$R = 1{,}5\ m \qquad \sigma = 7{,}8\ \mu C/m^2 \qquad Q? \qquad \phi? \qquad r_1 = 0{,}55\ m \qquad E_1? \qquad r_2 = 5{,}5\ m \qquad E_2?$$

A. Per definizione, la densità superficiale di carica è data dal rapporto tra la carica e la superficie, perciò:

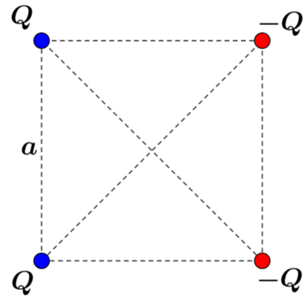
$$\sigma = \frac{Q}{A} \quad \Rightarrow \quad Q = A\sigma = 4\pi R^2\sigma = \boldsymbol{2{,}2\cdot 10^{-4}\ C}$$

B. Per il teorema di Gauss: $\phi = \frac{Q}{\varepsilon_o} = \mathbf{2,5 \cdot 10^7\ N\ m^2/C}$.

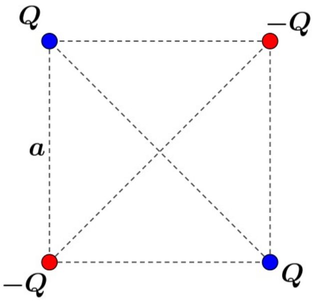
C. Il campo elettrico di una sfera conduttrice uniformemente carica è dato da:

$$E = \begin{cases} 0 & r < R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} & r \geq R \end{cases} \qquad E_1 = \mathbf{0\ N/C} \qquad E_2 = \mathbf{6,6\ \cdot 10^4\ N/C}$$

4. Nei vertici di un quadrato di lato a sono disposte quattro cariche di uguale modulo, due positive e due negative. Calcola l'energia potenziale elettrica per tale sistema di cariche nelle due configurazioni diverse che si possono ottenere.



$$U = k\frac{Q^2}{a} - k\frac{Q^2}{a\sqrt{2}} - k\frac{Q^2}{a} - k\frac{Q^2}{a} - k\frac{Q^2}{a\sqrt{2}} + k\frac{Q^2}{a} = \mathbf{-k\frac{Q^2}{a}\sqrt{2}}$$



$$U = -k\frac{Q^2}{a} + k\frac{Q^2}{a\sqrt{2}} - k\frac{Q^2}{a} - k\frac{Q^2}{a} + k\frac{Q^2}{a\sqrt{2}} - k\frac{Q^2}{a} = k\frac{Q^2}{a}\left(-4 + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \mathbf{k\frac{Q^2}{a}(\sqrt{2} - 4)}$$

5. Una particella di carica $30\ \mu C$ e massa $0{,}250\ mg$ ha una velocità di $12{,}0\ m/s$ e si trova in un punto dello spazio a un potenziale di $2{,}00\ V$. Se viene spostata in un secondo punto nel quale il suo potenziale scende a $0{,}50\ V$, quale sarà la sua velocità in questo secondo punto?

$$q = 30\ \mu C \qquad m = 0{,}250\ mg \qquad v_1 = 12{,}0\ m/s \qquad V_1 = 2{,}00\ V \qquad V_2 = 0{,}50\ V \qquad v_2?$$

Applico il principio di conservazione dell'energia:

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2 \qquad K_2 = K_1 + U_1 - U_2$$

Sapendo che il potenziale è dato dal rapporto tra energia potenziale e carica, ottengo: $U = qV$, perciò:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + qV_1 - qV_2 \qquad v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2q}{m}(V_1 - V_2)} = \mathbf{22,4\ m/s}$$

6. La differenza di potenziale tra le armature di un condensatore a facce piane e parallele è $35\ V$ e il campo elettrico tra le armature è di $750\ V/m$. Se l'area della superficie delle armature è $4{,}0 \cdot 10^{-2}\ m^2$, qual è la capacità del condensatore?

$$V = 35\ V \qquad E = 750\ V/m \qquad A = 4{,}0\ \cdot 10^{-2}\ m^2 \qquad C?$$

Sapendo che $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$, all'interno del condensatore e che $\sigma = \frac{Q}{A}$, dalla definizione di capacità, come rapporto tra carica e potenziale, trovo la risposta al quesito:

$$Q = A\sigma = AE\varepsilon_o \quad \Rightarrow \quad C = \frac{Q}{V} = \varepsilon_o\frac{AE}{V} = \mathbf{7,6 \cdot 10^{-12}\ F}$$