1. $y = \sqrt{(x-1)^2 - 9} + 1$

   Funzione algebrica irrazionale

   Dominio: $(x-1)^2 - 9 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x-1 \leq -3 \quad \vee \quad x-1 \geq 3 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x \leq -2} \quad \vee \quad \boldsymbol{x \geq 4}$

   Segno: $\sqrt{(x-1)^2 - 9} + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\forall x \in D}$

   Eventuali intersezioni con gli assi: Non ci sono intersezioni con gli assi cartesiani, perché l'asse y è escluso dal dominio, e non intersecherà mai l'asse x, perché la funzione non può mai essere nulla, in quanto data dalla somma di due quantità positive.

2. $y = \sqrt{|x| - 1} + \sqrt{|x|}$

   Funzione algebrica irrazionale

   Dominio: $\begin{cases} |x| - 1 \geq 0 \\ |x| \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |x| - 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x \leq -1} \quad \vee \quad \boldsymbol{x \geq 1}$

   Segno: $\sqrt{|x| - 1} + \sqrt{|x|} > 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\forall x \in D}$

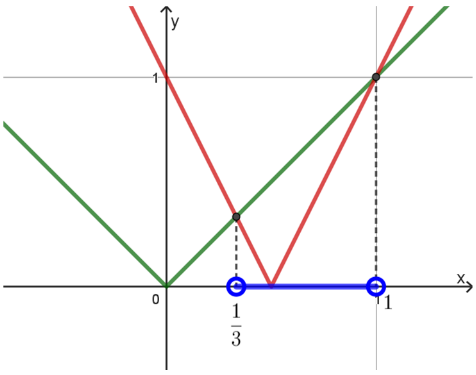
   Eventuali intersezioni con gli assi: Non ci sono intersezioni con gli assi cartesiani, perché l'asse y è escluso dal dominio, e non intersecherà mai l'asse x, perché la funzione non può mai essere nulla, in quanto data dalla somma di due quantità positive.

3. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{|x| - |2x-1|}}$

   Funzione algebrica irrazionale

   Dominio: $|x| - |2x-1| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 1 \neq \pm x \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x \neq 1} \quad \wedge \quad \boldsymbol{x \neq \frac{1}{3}}$

   Per determinare il segno uso la soluzione grafica, visto che il segno dipende dall'argomento della radice al denominatore: $|x| - |2x-1| > 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{1}{3} < x < 1}$

   Eventuali intersezioni con gli assi: Non ci sono intersezioni con l'asse x, perché la funzione non può mai essere nulla. Per l'asse y:

   $$\begin{cases} y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{|x| - |2x-1|}} \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \qquad \boldsymbol{A(0; -1)}$$

4. $y = \frac{x}{\sqrt{5-x} + \sqrt{x+2}}$

   Funzione algebrica irrazionale

   Dominio: $\begin{cases} 5 - x \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \leq 5 \\ x \geq -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{-2 \leq x \leq 5}$

   Segno: Il denominatore, in quanto somma di due radici quadrate – sempre positive nel dominio – è sempre positivo, perciò il segno dipende dal numeratore, quindi: $\frac{x}{\sqrt{5-x} + \sqrt{x+2}} > 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{0 < x \leq 5}$

   Eventuali intersezioni con gli assi: L'unica intersezione con gli assi è l'origine $\boldsymbol{O(0; 0)}$

5. $y = \frac{x+2}{e^{x+2} - 1}$

   Funzione trascendente

   Dominio: $e^{x+2} - 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad e^{x+2} \neq 1 \quad \Rightarrow \quad x + 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x \neq -2}$

   Segno: $\frac{x+2}{e^{x+2} - 1} > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} N > 0: x + 2 > 0 \\ D > 0: e^{x+2} > 1 \quad \Rightarrow \quad x + 2 > 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\forall x \in D}$

   Eventuali intersezioni con gli assi: La funzione non può mai essere nulla, perciò non ci sono intersezioni con l'asse x. Con l'asse y:

   $$\begin{cases} y = \dfrac{x+2}{e^{x+2} - 1} \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{2}{e^2 - 1} \end{cases} \qquad \boldsymbol{A\left(0; \frac{2}{e^2 - 1}\right)}$$

6. $y = \frac{1}{\ln(2^x - 1)}$

   Funzione trascendente

   Dominio: $\begin{cases} \ln(2^x - 1) \neq 0 \\ 2^x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x - 1 \neq 1 \\ 2^x > 2^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x \neq 2 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x > 0 \;\wedge\; x \neq 1}$

   Segno: $\frac{1}{\ln(2^x - 1)} > 0 \Rightarrow \ln(2^x - 1) > 0 \Rightarrow 2^x - 1 > 1 \Rightarrow 2^x > 2 \Rightarrow \boldsymbol{x > 1}$

   Eventuali intersezioni con gli assi: Non ci sono intersezioni con gli assi cartesiani, perché l'asse y è escluso dal dominio, e non intersecherà mai l'asse x, perché la funzione non può mai essere nulla.

7. $y = \sqrt{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} - 27}$

   Funzione trascendente

   Dominio: $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} - 27 \geq 0 \Rightarrow 3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 27 \geq 0 \Rightarrow (3^x - 9)(x^3 + 3) \geq 0 \Rightarrow 3^x \geq 9 \Rightarrow \boldsymbol{x \geq 2}$

   Segno: $\sqrt{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} - 27} \geq 0 \Rightarrow \boldsymbol{\forall x \in D}$

   Eventuali intersezioni con gli assi: Non ci sono intersezioni con l'asse y, perché è escluso dal dominio. Con l'asse x:

   $$\begin{cases} y = \sqrt{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} - 27} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{A(2;0)}$$

8. $y = \log_{\frac{1}{2}}(\sin x + \cos 2x)$ nell'intervallo $[0; 2\pi]$

   Funzione trascendente

   Dominio: $\sin x + \cos 2x > 0 \Rightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 < 0 \Rightarrow (\sin x - 1)(2\sin x + 1) < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < \sin x < 1 \Rightarrow$

   $$\boldsymbol{0 \leq x < \frac{7}{6}\pi \;\vee\; \frac{11}{6}\pi < x \leq 2\pi \;\wedge\; x \neq \frac{\pi}{2}}$$

   Segno: $\log_{\frac{1}{2}}(-2\sin^2 x + \sin x + 1) > 0 \Rightarrow -2\sin^2 x + \sin x + 1 < 1 \Rightarrow 2\sin^2 x - \sin x > 0 \Rightarrow$

   $$\begin{cases} \sin x < 0 \vee \sin x > \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} < \sin x < 1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2} < \sin x < 0 \vee \frac{1}{2} < \sin x < 1 \Rightarrow \boldsymbol{\left(\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2}\right) \vee \pi < x < \frac{7}{6}\pi \vee \frac{11}{6}\pi < x < 2\pi}$$

   Eventuali intersezioni con gli assi: Con l'asse x:

   $$\begin{cases} y = \log_{\frac{1}{2}}(-2\sin^2 x + \sin x + 1) \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\sin^2 x - \sin x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{A\left(\frac{\pi}{6}; 0\right) \quad B\left(\frac{5}{6}\pi; 0\right) \quad O(0;0) \quad C(\pi;0) \quad D(2\pi;0)}$$

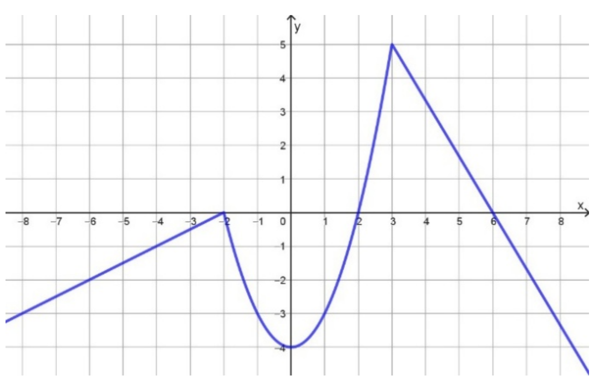
   Avendo trovato l'origine tra i punti di intersezione, ho già trovato l'intersezione con l'asse y.

9. Data la funzione $y = f(x)$ rappresentata nel grafico della figura sottostante, dopo averne determinato l'equazione (tieni presente che la parte centrale è un arco di parabola), disegna i grafici delle funzioni: $y = |f(x)|$ $\quad y = f(|x|)$ $\quad y = -f(x) - 2$ $\quad y = f(-x)$.

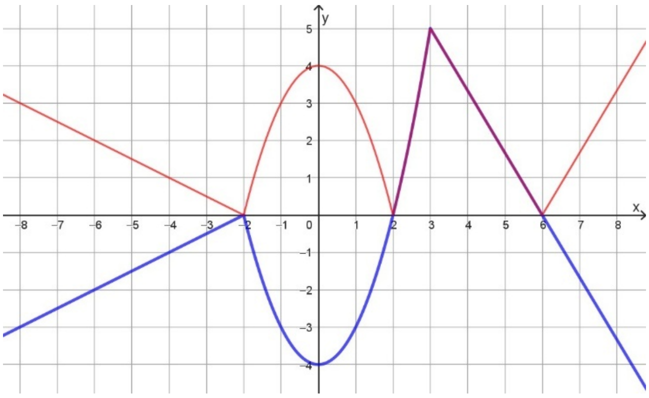
La parte a sinistra è una retta di coefficiente angolare $\frac{1}{2}$ e passante per il punto $(-2, 0)$: $y = \frac{1}{2}(x + 2) \qquad y = \frac{1}{2}x + 1$

Anche la parte a destra è una retta, con coefficiente angolare $-\frac{5}{3}$ e passante per il punto $(6, 0)$: $y = -\frac{5}{3}(x - 6) \qquad y = -\frac{5}{3}x + 10$

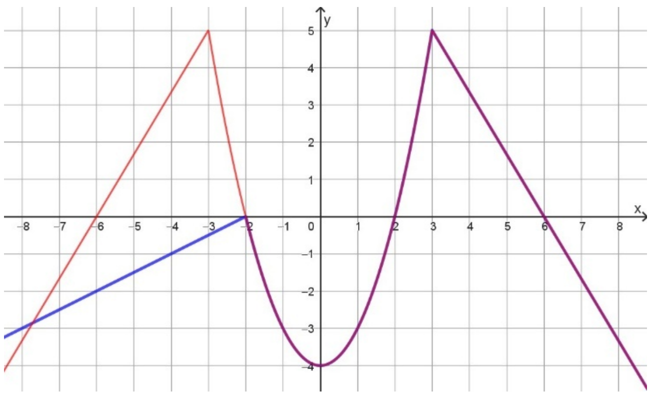
La parte centrale è una parabola di vertice $V(0, -4)$ e con asse di simmetria coincidente con l'asse y, perciò: $y = x^2 - 4$



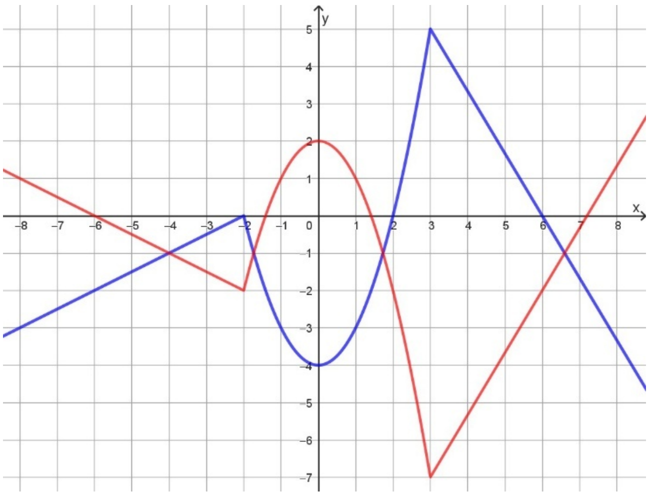
$$y = \begin{cases} \boldsymbol{\frac{1}{2}x + 1} & \boldsymbol{x < -2} \\ \boldsymbol{x^2 - 4} & \boldsymbol{-2 \leq x < 3} \\ \boldsymbol{-\frac{5}{3}x + 10} & \boldsymbol{x \geq 3} \end{cases}$$



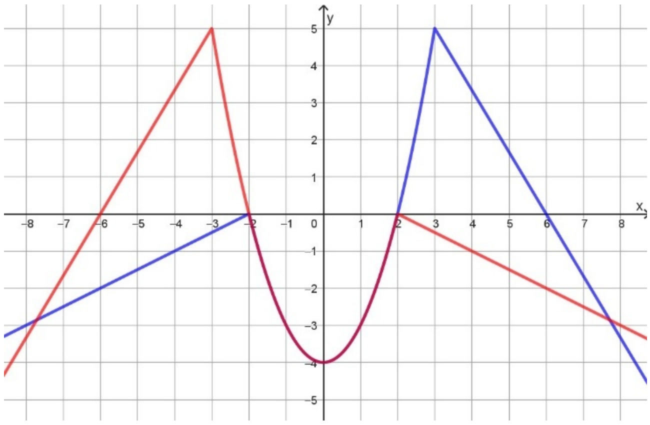
$y = |f(x)|$



$y = f(|x|)$

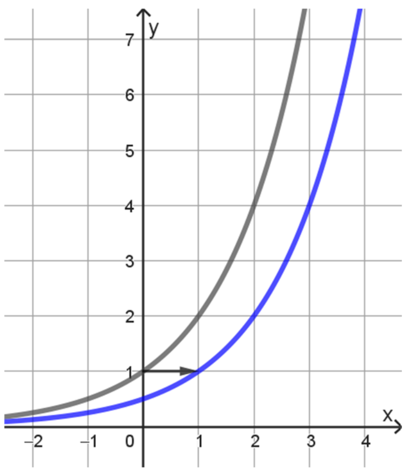


$y = -f(x) - 2$



$y = f(-x)$

10. Disegna il grafico della funzione $f(x) = 2^{x-1}$ e dimostra che $f(-x) \cdot f(x) = f(-1)$.



Rappresento la funzione $y = 2^x$ in grigio e la traslo di un vettore $\vec{v}(1; 0)$, ottenendo la funzione rappresentata in blu.

Verifico che $f(-x) \cdot f(x) = f(-1)$:

$$2^{-x-1} \cdot 2^{x-1} = 2^{-1-1}$$

Uguaglianza verificata per la proprietà delle potenze a primo membro:

$$2^{-x-1+x-1} = 2^{-2}$$