1. Scrivi le equazioni delle simmetrie s_1 e s_2 rispetto alla retta di equazione $y=-x+3$ e rispetto a quella di equazione $y=-x-1$. Determina le equazioni di $s_1 \circ s_2$, verificando che è una traslazione di vettore $\vec{v}$ perpendicolare alle due rette e di modulo uguale al doppio della distanza tra le due rette.

Un punto $A(x,y)$ viene trasformato nel suo simmetrico $A'(x',y')$ rispetto alla retta $y=-x+3$, quando il segmento AA' è perpendicolare alla retta data, cioè quando $m_{AA'}=1$, e il punto medio $M\left(\frac{x+x'}{2},\frac{y+y'}{2}\right)$ del segmento appartiene alla retta:

$$\begin{matrix} m_{AA'}=1 \\ M\in y=-x+3 \end{matrix}\begin{cases} \dfrac{y-y'}{x-x'}=1 \\ \dfrac{y+y'}{2}=-\dfrac{x+x'}{2}+3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=x-x'+y' \\ x-x'+y'+y'=-x-x'+6 \end{cases} \qquad s_1:\begin{cases} x'=-y+3 \\ y'=-x+3 \end{cases}$$

Procedo allo stesso modo per quanto riguarda la simmetria s_2, con il punto B e il suo simmetrico B' e il punto medio N del segmento BB':

$$\begin{matrix} m_{BB'}=1 \\ N\in y=-x-1 \end{matrix}\begin{cases} \dfrac{y-y'}{x-x'}=1 \\ \dfrac{y+y'}{2}=-\dfrac{x+x'}{2}-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=x-x'+y' \\ x-x'+y'+y'=-x-x'-2 \end{cases} \qquad s_2:\begin{cases} x'=-y-1 \\ y'=-x-1 \end{cases}$$

Determino le equazioni della funzione composta: $(x;y)\overset{s_2}{\to}(-y-1;\ -x-1)\overset{s_1}{\to}(x+4;y+4)$ che è una traslazione di vettore $\vec{v}\,(4,4)$. Il vettore è perpendicolare alle due rette, visto che forma un angolo di 45° con la direzione positiva dell'asse x, mentre le due rette sono parallele alla bisettrice di secondo e quarto quadrante e, quindi, formano un angolo di 135° con la direzione positiva dell'asse x. Il modulo del vettore è dato da $|\vec{v}|=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$ e la distanza tra le due rette, considerando il punto $(0,-1)$ della seconda retta e calcolandone la distanza dalla prima retta:

$$\frac{|0+1+3|}{\sqrt{1+1}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

Come volevasi dimostrare, il vettore $\vec{v}$ ha modulo uguale al doppio della distanza tra le due rette.

2. $\left|\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right|<\frac{\sqrt{2}}{2}$

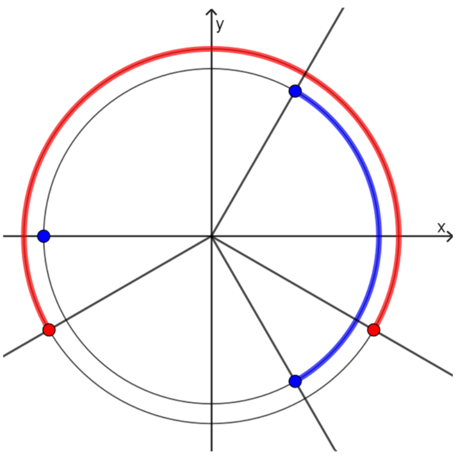
$$-\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)<\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \frac{\pi}{4}+k\pi<2x+\frac{\pi}{4}<\frac{3}{4}\pi+k\pi \qquad \boldsymbol{k\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}}$$

3. $\begin{cases} 2\sin^2 x-\cos x-1\le 0 \\ 2\sin x+1\ge 0 \end{cases}$

$$I\ dis: 2(1-\cos^2 x)-\cos x-1\le 0 \qquad 2\cos^2 x+\cos x-1\ge 0 \qquad (\cos x+1)(2\cos x-1)\ge 0$$

$$\cos x\le -1 \quad \vee \quad \cos x\ge \frac{1}{2} \qquad x=\pi+2k\pi \quad \vee \quad -\frac{\pi}{3}+2k\pi\le x\le \frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$$II\ dis:\ \sin x\ge -\frac{1}{2} \qquad -\frac{\pi}{6}+2k\pi\le x\le \frac{7}{6}\pi+2k\pi$$



$$\begin{cases} x=\pi+2k\pi \quad \vee \quad -\frac{\pi}{3}+2k\pi\le x\le\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ -\frac{\pi}{6}+2k\pi\le x\le\frac{7}{6}\pi+2k\pi \end{cases}$$

$$\boldsymbol{-\frac{\pi}{6}+2k\pi\le x\le\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad \vee \quad x=\pi+2k\pi}$$

4. Trova i valori di a, b, c in modo che il grafico della funzione $y = a\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + b\cos x + c$ passi per l'origine O e per i punti $\left(\frac{2}{3}\pi; 3\right)$ e $\left(-\frac{\pi}{3}; -1\right)$. Calcola poi i punti di intersezione con l'asse x nell'intervallo $[-\pi; \pi]$.

Impongo il passaggio della funzione per l'origine e per i punti dati, sostituendo le coordinate dei punti nell'equazione della funzione e ottenendo un sistema di tre equazioni in tre incognite (i parametri) (indico le equazioni come A, B e C per facilitare la comprensione dei passaggi):

$$\begin{array}{l} A: \\ B: \\ C: \end{array}\begin{cases} \frac{1}{2}a + b + c = 0 \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + c = 3 \\ -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + c = -1 \end{cases} \qquad \begin{array}{r} A-B: \\ B+C: \\ C: \end{array}\begin{cases} \frac{3}{2}b = -3 \\ 2c = 2 \\ a - b - 2c = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases} \qquad y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2\cos x + 1$$

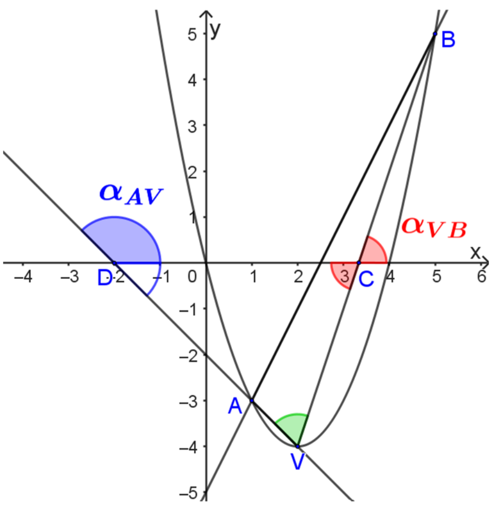
Per determinare le coordinate dei punti di intersezione con l'asse x, risolvo il sistema:

$$\begin{cases} y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2\cos x + 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2\cos x + 1 = 0 \qquad \cos x + \sqrt{3}\sin x - 2\cos x + 1 = 0$$

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = -1 \qquad 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \qquad \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{O(0,0)} \qquad x - \frac{\pi}{6} = -\frac{5}{6}\pi \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{2}{3}\pi \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A\left(-\frac{2}{3}\pi, 0\right)}$$

5. Siano A e B i punti di intersezione fra la retta $2x - y - 5 = 0$ e la parabola $y = x^2 - 4x$, V il vertice. Determina il coseno dell'angolo $A\hat{V}B$, utilizzando il teorema di Carnot nel triangolo AVB, e confrontalo con il valore della sua tangente dedotto dalle rette AV e VB.



Determino le coordinate dei punti di intersezione tra parabola e retta:

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = x^2 - 4x \end{cases} \qquad x^2 - 4x = 2x - 5 \qquad x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x-1)(x-5) = 0 \qquad A(1; -3) \qquad B(5; 5)$$

Il vertice ha coordinate: $V(2; -4)$.

Per applicare il teorema di Carnot al triangolo AVB, determino la lunghezza di tutti i lati:

$$\overline{AV} = \sqrt{2} \qquad \overline{AB} = 4\sqrt{5} \qquad \overline{BV} = 3\sqrt{10}$$

$$T.\,di\ Carnot:\ \overline{AB}^2 = \overline{AV}^2 + \overline{BV}^2 - 2\cdot\overline{AV}\cdot\overline{BV}\cdot\cos A\hat{V}B$$

$$\cos A\hat{V}B = \frac{\overline{AV}^2 + \overline{BV}^2 - \overline{AB}^2}{2\cdot\overline{AV}\cdot\overline{BV}} = \frac{2 + 90 - 80}{2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{10}} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{5}}$$

Ricordando che il coefficiente angolare della retta corrisponde alla tangente dell'angolo che la retta forma con la direzione positiva dell'asse x.

Considero il triangolo VCD, dal quale ottengo, per la somma degli angoli interni di un triangolo, che $A\hat{V}B = \pi - V\hat{C}D - C\hat{D}V$ e gli angoli $C\hat{D}V$ e $V\hat{C}D$, come evidenziato dal disegno, sono, rispettivamente, il supplementare di α_{AV} e l'angolo opposto di α_{VB}, perciò:

$$\tan C\hat{D}V = -\tan\alpha_{AV} = -m_{AV} = -\frac{y_V - y_A}{x_V - x_A} = 1 \qquad \tan V\hat{C}D = \tan\alpha_{VB} = m_{VB} = \frac{y_V - y_B}{x_V - x_B} = 3$$

$$\tan A\hat{V}B = \tan\left(\pi - V\hat{C}D - C\hat{D}V\right) = -\tan\left(V\hat{C}D + C\hat{D}V\right) = -\frac{\tan V\hat{C}D + \tan C\hat{D}V}{1 - \tan V\hat{C}D\cdot\tan C\hat{D}V} = -\frac{3+1}{1-3} = 2$$

Compatibile con il risultato ottenuto per il coseno, infatti:

$$\tan A\hat{V}B = \frac{\sin A\hat{V}B}{\cos A\hat{V}B} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 A\hat{V}B}}{\cos A\hat{V}B} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}}\cdot\sqrt{5} = 2 \qquad c.v.d.$$

6. Calcola il valore della seguente espressione:

$$\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^2}{1-i\sqrt{3}}+\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)^3}{5i}+\left[\frac{7\left(2+i\sqrt{3}\right)}{1+4i\sqrt{3}}+i\sqrt{3}\right]:\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1+2i\sqrt{3}-3}{1-i\sqrt{3}}+\frac{3\sqrt{3}-9i-3\sqrt{3}+i}{5i}+2\cdot\frac{14+7i\sqrt{3}+i\sqrt{3}-12}{1+4i\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{-2\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1-i\sqrt{3}}+\frac{-8i}{5i}+2\cdot\frac{2\left(1+4i\sqrt{3}\right)}{1+4i\sqrt{3}}=-2-\frac{8}{5}+4=\mathbf{\frac{2}{5}}$$

7. Risolvi l'equazione: $z^3=(i-2)^3$

Aiutandomi con la differenza tra cubi, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, l'equazione diventa:

$$\left(z-(i-2)\right)\left(z^2+(i-2)\,z+(i-2)^2\right)=0$$

Per la legge di annullamento del prodotto:

$$\boldsymbol{z_1=i-2}$$

$$z_{2,3}=\frac{2-i\pm\sqrt{(i-2)^2-4(i-2)^2}}{2}=\frac{2-i\pm(i-2)\cdot i\sqrt{3}}{2}=\frac{2-i\pm\left(-\sqrt{3}-2i\sqrt{3}\right)}{2}$$

$$\boldsymbol{z_2=1-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)} \qquad \boldsymbol{z_3=1+\frac{\sqrt{3}}{2}-i\left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)}$$

8. Zoe sfida Eva al seguente gioco: lanciando un dado regolare a sei facce, Zoe segna un punto quando esce il 5 oppure il 6, in caso contrario è Eva a segnare un punto. Vince chi arriva prima a 3 punti. Qual è la probabilità che Zoe vinca con il punteggio 3 – 1?

Esame di Stato 2025, sessione suppletiva, quesito 2

Perché Zoe vinca con il punteggio di 3 – 1, si possono verificare tre casi:

- Eva vince la prima partita e Zoe le altre tre
- Eva vince la seconda partita, mentre Zoe ha vinto la prima e le ultime due
- Eva vince la terza partita, mentre Zoe ha vinto le prime due e l'ultima

In ogni caso, si tratta di una partita vinta da Eva e 3 vinte da Zoe in tre modi diversi.

Calcolo la probabilità dei singoli casi e le sommo, tenendo presente che Zoe ha una probabilità di 1/3 di vincere un singolo lancio, mentre Eva ha una probabilità di 2/3:

$$p=3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{2}{3}=\mathbf{\frac{2}{27}}$$

9. Ci sono 9 matite di 9 colori diversi e 3 cassetti indicati con A, B, C. Se 4 matite devono essere messe nel cassetto A, 2 nel cassetto B e 3 nel cassetto C, quante sono le possibili collocazioni?

Esame di Stato 2025, sessione suppletiva, quesito 3

Devo moltiplicare il numero di modi in cui posso scegliere 4 matite da un gruppo di 9, per il numero di modi in cui posso scegliere 2 matite dal gruppo restante di 5:

$$\binom{9}{4}\cdot\binom{5}{2}=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2}\cdot\frac{5\cdot4}{2}=\mathbf{1260}$$

Avrei ottenuto lo stesso risultato, se avessi scelto, dopo le 4 del cassetto A, le 3 del cassetto C, per la legge delle classi complementari dei coefficienti binomiali; se avessi scelto prima le 3 matite da mettere nel cassetto C e poi le 2 da mettere nel cassetto B:

$$\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{2}=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2}\cdot\frac{6\cdot5}{2}=\mathbf{1260}$$

Allo stesso modo, anche in questo caso, se avessi scelto, dopo le 3 del cassetto C, le 4 del cassetto A, non sarebbe cambiato nulla. E se scegliessi prima le 2 del cassetto B e poi (abbiamo capito che è indifferente la seconda scelta per la legge delle classi complementari) le 4 del cassetto A? Ovviamente non cambierebbe nulla:

$$\binom{9}{2}\cdot\binom{7}{4}=\frac{9\cdot 8}{2}\cdot\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2}=\mathbf{1260}$$

10. Determinare l'equazione delle superfici sferiche di raggio $5\sqrt{2}$ tangenti nel punto $P(-1,2,3)$ al piano di equazione $3x+4y-5z+10=0$.

Esame di Stato 2023, sessione suppletiva, quesito 3

I parametri direttori della direzione normale al piano sono: $\vec{v}(3;4;-5)$. Determino la retta perpendicolare al piano, con il quale condivide i coefficienti direttivi, e passante per il punto P, sulla quale si trova il centro della sfera:

$$\begin{cases} x=-1+3k \\ y=2+4k \\ z=3-5k \end{cases}$$

Il centro della sfera ha coordinate generiche $C(-1+3k,2+4k,3-5k)$. Pongo la distanza del generico centro dal punto P uguale al raggio dato:

$$\overline{CP}=5\sqrt{2} \quad\Rightarrow\quad \overline{CP}^2=50 \quad\Rightarrow\quad (-1+3k+1)^2+(2+4k-2)^2+(3-5k-3)^2=50$$

$$9k^2+16k^2+25k^2=50 \qquad k^2=1 \qquad k=\pm 1$$

I due centri hanno coordinate: $C_1(2,6,-2)$ e $C_2(-4,-2,8)$.
Le due sfere hanno equazione:

$$\mathcal{S}_1: (x-2)^2+(y-6)^2+(z+2)^2=50 \qquad \boldsymbol{x^2+y^2+z^2-4x-12y+4z-6=0}$$
$$\mathcal{S}_2: (x+4)^2+(y+2)^2+(z-8)^2=50 \qquad \boldsymbol{x^2+y^2+z^2+8x+4y-16z+34=0}$$

11. Nello spazio con riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ sono date le equazioni di due rette:

$$r: \begin{cases} y-z-1=0 \\ x-z=4 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=3-t \end{cases}$$

Dopo aver dimostrato che le due rette sono incidenti, determinare l'equazione del piano che le contiene. Verificare che la sfera di centro $C(5,-7,2)$ passante per il punto $P(1,-1,0)$ è tangente al piano suddetto.

Esame di Stato 2025, sessione suppletiva, quesito 4

Verifico che le due rette hanno un punto in comune, sostituendo le equazioni parametriche di s nelle due equazioni di r e verificando che danno lo stesso risultato per il parametro:

$$\begin{cases} t-3+t-1=0 \\ 1+2t-3+t=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} t=2 \\ t=2 \end{cases}$$

Il piano che contiene entrambe le rette sarà parallelo a entrambe e passante per il punto di incontro ($A(5,2,1)$ ottenuto sostituendo il parametro $t=2$ nell'equazione di s). Per essere parallelo a entrambe le rette, il piano deve avere i parametri direttori della direzione normale al piano perpendicolari ai vettori delle rette. Per la retta s il vettore è $\vec{s}\ (2,1,-1)$, mentre devo determinare quello per la retta r:

$$\begin{cases} x=k \\ k-z=4 \\ y=z+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=k \\ z=k-4 \\ y=k-3 \end{cases} \qquad \vec{r}\ (1,1,1)$$

Sia (a,b,c) il vettore normale al piano, pongo la condizione di perpendicolarità con $\vec{r}$ e $\vec{s}$, ovvero:

$$\begin{cases} ar_x+br_y+cr_z=0 \\ as_x+bs_y+cs_z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b+c=0 \\ 2a+b-c=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=2c \\ b=-3c \end{cases}$$

Impongo il passaggio del piano per il punto A:

$$2c\ (x-5)-3c\ (y-2)+c(z-1)=0 \qquad \alpha: 2x-3y+z-5=0$$

Per verificare che la sfera è tangente al piano dato, la distanza del centro della sfera dal piano dovrà essere uguale alla distanza $\overline{CP}$:

$$\overline{CP}=\sqrt{4^2+6^2+2^2}=2\sqrt{2^2+3^2+1}=2\sqrt{14} \qquad d(C;\ \alpha)=\frac{|10+21+2-5|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\frac{28}{\sqrt{14}}=2\sqrt{14}$$