1. La somma di due cariche è $6{,}0\ \mu C$. Mettendole a una distanza di $3{,}0\ m$, ciascuna esercita sull'altra una forza di modulo $8{,}0\ mN$. Quanto valgono le due cariche?

$$q_1 + q_2 = Q = 6{,}0\ \mu C \qquad r = 3{,}0\ m \qquad F = 8{,}0\ mN \qquad q_1? \qquad q_2?$$

Si distinguono due casi: nel caso in cui la forza sia repulsiva, le cariche hanno lo stesso segno e sono entrambe positive; nel caso in cui la forza sia attrattiva, le cariche hanno segno opposto e quella di modulo maggiore è positiva.

1° caso: forza attrattiva, cariche entrambe positive

$$\begin{cases} F = k\dfrac{q_1 q_2}{r^2} \\ q_1 + q_2 = Q \end{cases} \qquad \begin{cases} q_1 q_2 = \dfrac{Fr^2}{k} \\ q_1 + q_2 = Q \end{cases} \qquad z^2 - Qz + \frac{Fr^2}{k} = 0 \qquad z_{1,2} = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 - \dfrac{4Fr^2}{k}}}{2} = \begin{cases} 4{,}0\ \mu C \\ 2{,}0\ \mu C \end{cases}$$

Le due cariche sono $\mathbf{2,0\ \mu C}$ e $\mathbf{4,0\ \mu C}$.

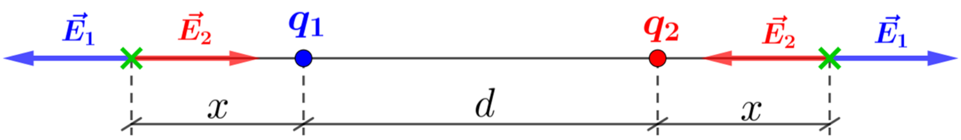
2° caso: forza repulsiva, cariche opposte con quella positiva di modulo maggiore

$$\begin{cases} F = k\dfrac{q_1 q_2}{r^2} \\ q_1 + q_2 = Q \end{cases} \qquad \begin{cases} q_1 q_2 = \dfrac{Fr^2}{k} \\ q_1 + q_2 = Q \end{cases} \qquad z^2 - Qz - \frac{Fr^2}{k} = 0 \qquad z_{1,2} = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 + \dfrac{4Fr^2}{k}}}{2} = \begin{cases} 7{,}1\ \mu C \\ -1{,}1\ \mu C \end{cases}$$

Le due cariche sono $\mathbf{7,1\ \mu C}$ e $\mathbf{-1,1\ \mu C}$.

2. Due cariche, una con modulo doppio dell'altra e di segno opposto, si trovano a una distanza d. In quali punti, lungo la retta che le congiunge, il campo elettrico è nullo?

$$q_2 = -2q_1 \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = d \qquad E = 0\ N/C \qquad x?$$



Posta q_1 nell'origine, considero q_1 positiva e q_2 negativa (ma non cambierebbe nulla invertendo i segni). Gli unici due punti in cui il campo elettrico può essere nullo sono quelli indicati a sinistra di q_1 e a destra di q_2. In questi due casi, i campi elettrici (come mostrato in figura) hanno verso opposto e possono, quindi, dare una risultante nulla. Perché la risultante sia nulla, i due campi elettrici devono avere lo stesso modulo:

1° caso: punto a sinistra di q_1:

$$E_1 = E_2 \quad \Rightarrow \quad k\frac{q_1}{x^2} = k\frac{q_2}{(x+d)^2} \quad \Rightarrow \quad q_1(x+d)^2 = 2q_1 x^2 \quad \Rightarrow \quad x + d = x\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{d}{\sqrt{2}-1} = \mathbf{d(\sqrt{2}+1)}$$

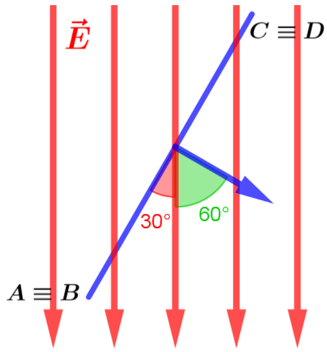
2° caso: punto a destra di q_2:

$$E_1 = E_2 \quad \Rightarrow \quad k\frac{q_1}{(x+d)^2} = k\frac{q_2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad q_1 x^2 = 2q_1(x+d)^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{2}(x+d) \quad \Rightarrow \quad x(1-\sqrt{2}) = d$$

L'equazione è impossibile, visto che i due membri hanno segno opposto.

In altre parole, l'unico caso in cui il campo elettrico totale è nullo è a sinistra di q_1, a una distanza da q_1 pari a $d(\sqrt{2}+1)$.

3. Un profilo rettangolare di base $AB = 5{,}0\ cm$ e altezza $BC = 15\ cm$ è immerso in un campo elettrico uniforme di intensità $12\ N/C$. La base è perpendicolare alle linee di campo mentre l'altezza forma un angolo di 30° con la direzione del campo. Determina il flusso del campo $\vec{E}$ uscente dalla superficie rettangolare.



$$AB = 5{,}0\ cm \qquad BC = 15\ cm \qquad E = 12\ N/C \qquad \alpha = 30° \qquad \Phi_{\text{ABCD}}(\vec{E})?$$

Per definizione, il flusso del campo elettrico è dato da: $\Phi_{\text{ABCD}}(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{S}$.

Il vettore superficie ha direzione perpendicolare alla superficie, perciò forma con il vettore campo elettrico un angolo di 60°, come si può evincere dalla rappresentazione a lato.
Perciò:

$$\Phi_{\text{ABCD}}(\vec{E}) = ES\cos 60° = E \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos 60° = \mathbf{0{,}045\ Nm^2/C}$$

4. Il flusso attraverso una superficie che racchiude due cariche è nullo. La forza che agisce sulla carica di $30\ nC$ è di $3{,}6 \cdot 10^{-8}\ N$. Quanto vale la distanza tra le cariche?

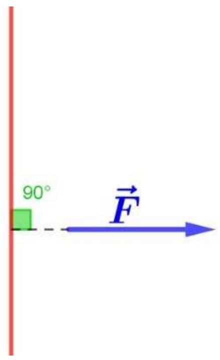
$$q_1 = 30\ nC \qquad F = 3{,}6 \cdot 10^{-8}\ N \qquad \Phi = 0\ N\,m^2/C \qquad d?$$

Per il teorema di Gauss, il flusso di un campo elettrico è dato dal rapporto tra la carica totale racchiusa dalla superficie e la costante dielettrica: questo significa che la carica totale racchiusa dalla superficie è nulla, ovvero che le due cariche sono uguali e opposte: $q_2 = -q_1$. Perciò:

$$F = k\frac{q_1^2}{d^2} \quad \Rightarrow \quad d = q_1\sqrt{\frac{k}{F}} = \mathbf{15\ m}$$

5. Una particella di $12\ \mu C$ è posta a $10\ cm$ da un filo uniformemente carico di densità lineare pari a $2{,}8 \cdot 10^{-6}\ C/m$. Calcola il vettore forza a cui è soggetta la particella.

$$q = 12\ \mu C \qquad x = 10\ cm \qquad \lambda = 2{,}8 \cdot 10^{-6}\ C/m \qquad \vec{F}?$$



Il campo elettrico generato da un filo uniformemente carico ha intensità:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o\, x}$$

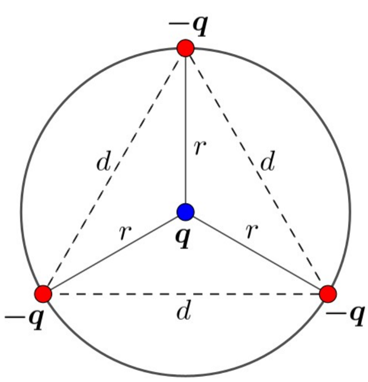
La forza è data dal prodotto tra il campo elettrico e la carica della particella:

$$F = Eq = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o\, x}q = \mathbf{6{,}0\ N}$$

La direzione è perpendicolare al filo, con verso uscente, visto che la carica sul filo e quella della particella hanno lo stesso segno.

6. Al centro di un cerchio di raggio $1{,}5\ m$ è posta una carica positiva di $4{,}2\ nC$. Che lavoro deve compiere una forza esterna affinché dall'infinito siano portate tre cariche uguali tra loro, ma di carica opposta a quella già presente, a uguale distanza l'una dall'altra, con energia cinetica nulla?

$$r = 1{,}5\ m \qquad q = 4{,}2\ nC \qquad L?$$



La distanza d tra le cariche provenienti dall'infinito è uguale al lato di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di raggio r. Per determinare tale distanza, considero il triangolo isoscele (di lato obliquo pari al raggio), con un vertice nel centro della circonferenza (quindi coincidente con la posizione della carica positiva) e angolo al vertice pari a 120°, perciò posso determinare la distanza d applicando il teorema di Carnot:

$$d = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r^2\cos 120°} = \sqrt{r^2 + r^2 + r^2} = r\sqrt{3}$$

Il lavoro fatto dalla forza esterna per costruire il sistema di cariche è uguale all'energia potenziale elettrica totale:

$$L=U_{12}+U_{13}+U_{23}+U_{1q}+U_{2q}+U_{3q}=k\frac{q^2}{d}+k\frac{q^2}{d}+k\frac{q^2}{d}-k\frac{q^2}{r}-k\frac{q^2}{r}-k\frac{q^2}{r}=$$

$$=k\frac{q^2}{r}\left(\frac{3}{\sqrt{3}}-3\right)=k\frac{q^2}{r}\left(\sqrt{3}-3\right)=\mathbf{-1{,}3\cdot 10^{-7}\,J}$$

7. Una proteina ionizzata di massa $2{,}00\cdot 10^{-22}\,kg$ e di carica $1{,}50\cdot 10^{-16}\,C$ si muove da un punto A ad un punto B nel vuoto per effetto di un campo elettrico. La velocità della proteina nel punto A è $200\,m/s$ e nel punto B è $350\,m/s$. Calcola la differenza di potenziale tra i punti B e A.

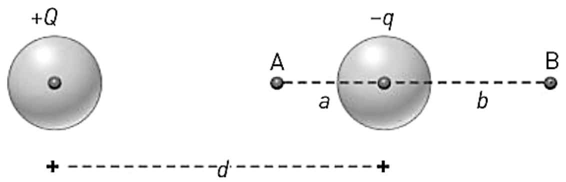
$$m=2{,}00\cdot 10^{-22}\,kg \qquad q=1{,}50\cdot 10^{-16}\,C \qquad v_A=200\,m/s \qquad v_B=350\,m/s \qquad V_B-V_A?$$

Applico il principio di conservazione dell'energia tra il punto A e il punto B:

$$K_A+U_A=K_B+U_B \quad\Rightarrow\quad U_B-U_A=K_A-K_B \quad\Rightarrow\quad qV_B-qV_A=K_A-K_B \quad\Rightarrow\quad V_B-V_A=\frac{\frac{1}{2}mv_A^2-\frac{1}{2}mv_B^2}{q}=\mathbf{-55\,mV}$$

8. Sulla retta congiungente due cariche $+Q$ e $-q$, con $Q\neq q$ e $+Q$ posta a sinistra di $-q$, il potenziale elettrico complessivo del sistema si annulla in due punti A e B. Il punto A si trova tra le cariche a una distanza di $10\,cm$ dalla carica negativa, mentre il punto B si trova a una distanza di $30\,cm$ a destra di quella negativa. Calcola la distanza d tra le cariche e il rapporto tra le cariche.

$$a=10\,cm \qquad b=30\,cm \qquad d? \qquad \frac{Q}{-q}?$$



Se il potenziale si annulla in A e in B, significa che il potenziale delle due cariche nei due punti indicati è opposto, cioè:

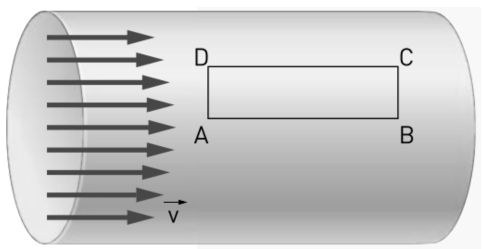
$$\begin{cases} k\dfrac{Q}{d-a}=k\dfrac{q}{a} \\ k\dfrac{Q}{d+b}=k\dfrac{q}{b}\end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{Q}{q}=\dfrac{d-a}{a} \\ \dfrac{Q}{q}=\dfrac{d+b}{b}\end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{Q}{q}=\dfrac{d}{a}-1 \\ \dfrac{d}{a}-1=\dfrac{d}{b}+1\end{cases}$$

$$\frac{d}{b}-\frac{d}{a}=-2 \qquad d=-2\frac{ab}{a-b}=-2\frac{a\cdot 3a}{a-3a}=3a=\mathbf{30\,cm}$$

$$\frac{Q}{-q}=1-\frac{d}{a}=1-\frac{3a}{a}=1-3=\mathbf{-2}$$

9. La velocità dell'acqua che scorre in un tubo cresce man mano che ci avviciniamo all'asse del tubo, allontanandosi dalle pareti, per effetto della viscosità. Nella figura 2, il valore della velocità sul lato AB è $v_1=50\,cm/s$, quello sul lato CD è $v_2=30\,cm/s$. Le dimensioni del rettangolo sono $\overline{AB}=20\,mm$, $\overline{BC}=5{,}0\,mm$. Calcola la circuitazione di $\vec{v}$ lungo il rettangolo.

$$v_1=50\,cm/s \qquad v_2=30\,cm/s \qquad \overline{AB}=\overline{CD}=20\,mm \qquad \overline{AD}=\overline{BC}=5{,}0\,mm \qquad \Gamma_{ABCD}(\vec{v})?$$



Applicando la definizione di circuitazione come prodotto scalare tra il vettore velocità e il vettore lunghezza e notando che i due lati AD e BC sono perpendicolari alla velocità (quindi il loro prodotto scalare è nullo), per il lato AB i due vettori sono paralleli ed equiversi, per il lato CD i due vettori sono paralleli, ma con verso opposto, ottengo:

$$\Gamma_{ABCD}(\vec{v})=v_1\,AB+0-v_2\,CD+0=(v_1-v_2)\,AB=\mathbf{4{,}0\cdot 10^{-3}\,m^2/s}$$