

RADICALI IN \mathbb{R}^+

Se n è un numero naturale e a un numero reale maggiore o eguale a zero, si dice **radice n-esima** di a quel numero reale maggiore, o eguale a zero, la cui potenza n -esima è eguale ad a :

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \quad a \geq 0, b \geq 0, n \in \mathbb{N}_0$$

La radice n -esima di un numero positivo è sempre, sia per n dispari sia per n pari, un numero positivo.

Il simbolo $\sqrt[n]{a}$ si chiama **radicale** (n -esimo), il numero a si chiama **radicando** e il numero n è detto **indice** del radicale. Nel proseguimento dell'argomento si tenga presente la seguente definizione:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad a > 0, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0$$

Nel seguito sono considerati: $a \geq 0, n, m, p, q \in \mathbb{N}_0$

	Operazione elementare	DIMOSTRAZIONE	ESEMPIO
PRIMA PROPRIETÀ FONDAMENTALE $(\sqrt[n]{a})^n = a$	Frazione apparente	$(\sqrt[n]{a})^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a$	$(\sqrt[5]{2})^5 = \left(2^{\frac{1}{5}}\right)^5 = 2^{\frac{5}{5}} = 2$
SECONDA PROPRIETÀ FONDAMENTALE $\sqrt[n]{a^n} = a$	Frazione apparente	$\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a$	$(\sqrt[5]{2^5}) = 2^{\frac{5}{5}} = 2$
PROPRIETÀ INVARIANTIVA $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$	Proprietà invariante delle frazioni: moltiplicando o dividendo numeratore e denominatore di una frazione per uno stesso numero diverso da 0, ottengo una frazione equivalente a quella data	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}} = \sqrt[np]{a^{mp}}$	$\sqrt[5]{2^3} = 2^{\frac{3}{5}} = 2^{\frac{21}{35}} = \sqrt[35]{2^{21}}$
SEMPLIFICAZIONE DI RADICALI $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$	Semplificazione di frazioni	$\sqrt[np]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{np}} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt[35]{2^{21}} = 2^{\frac{21}{35}} = 2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$
RIDUZIONE DI PIÙ RADICALI ALLO STESSO INDICE	Riduzione di più frazioni allo stesso denominatore	$\begin{array}{cc} \sqrt[n]{a^m} & \sqrt[p]{b^q} \\ \frac{m}{n} = a^{\frac{mp}{np}} & \frac{q}{p} = b^{\frac{nq}{np}} \\ \sqrt[np]{a^{mp}} & \sqrt[np]{b^{nq}} \end{array}$	$\begin{array}{cc} \sqrt[6]{2^5} & \sqrt[9]{7^8} \\ \frac{5}{6} = \frac{15}{18} & \frac{8}{9} = \frac{16}{18} \\ \sqrt[18]{2^{15}} & \sqrt[18]{7^{16}} \end{array}$

OPERAZIONI SUI RADICALI IN \mathbb{R}^+

MULTIPLICAZIONE DI RADICALI	Prodotto di potenze che hanno la stessa base (l'operazione che si compie è la somma di frazioni)	$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[p]{a^q} = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{q}{p}} =$ $= a^{\frac{m}{n} + \frac{q}{p}} = a^{\frac{mp + qn}{np}} = \sqrt[np]{a^{mp + qn}}$	$\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[6]{2^5} = 2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{5}{6}} =$ $= 2^{\frac{3}{4} + \frac{5}{6}} = 2^{\frac{9+10}{12}} = \sqrt[12]{2^{19}}$
	Prodotto di potenze che hanno lo stesso esponente (in questo caso basta che le frazioni all'esponente abbiano lo stesso denominatore)	$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[p]{b^q} = a^{\frac{m}{np}} \cdot b^{\frac{q}{np}} =$ $= a^{\frac{m}{np}} \cdot b^{\frac{q}{np}} = (a^m \cdot b^q)^{\frac{1}{np}} =$ $= \sqrt[np]{a^m \cdot b^q}$	$\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[6]{3^5} = 2^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{\frac{5}{6}} =$ $= 2^{\frac{9}{12}} \cdot 3^{\frac{10}{12}} = (2^9 \cdot 3^{10})^{\frac{1}{12}} =$ $= \sqrt[12]{2^9 \cdot 3^{10}}$
QUOZIENTE DI RADICALI	Quoziente di potenze che hanno la stessa base (l'operazione che si compie è la differenza di frazioni)	$\sqrt[n]{a^m} : \sqrt[p]{a^q} = a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{q}{p}} =$ $= a^{\frac{m}{n} - \frac{q}{p}} = a^{\frac{mp - qn}{np}} = \sqrt[np]{a^{mp - qn}}$	$\sqrt[6]{2^5} : \sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{5}{6}} : 2^{\frac{3}{4}} =$ $= 2^{\frac{5}{6} - \frac{3}{4}} = 2^{\frac{10-9}{12}} = \sqrt[12]{2}$
	Quoziente di potenze che hanno lo stesso esponente (in questo caso basta che le frazioni all'esponente abbiano lo stesso denominatore)	$\sqrt[n]{a^m} : \sqrt[p]{b^q} = a^{\frac{m}{np}} : b^{\frac{q}{np}} =$ $= a^{\frac{m}{np}} : b^{\frac{q}{np}} = (a^m : b^q)^{\frac{1}{np}} =$ $= \sqrt[np]{a^m : b^q} = \sqrt[np]{\frac{a^m}{b^q}}$	$\sqrt[4]{2^3} : \sqrt[6]{3^5} = 2^{\frac{3}{4}} : 3^{\frac{5}{6}} =$ $= 2^{\frac{9}{12}} : 3^{\frac{10}{12}} = (2^9 : 3^{10})^{\frac{1}{12}} =$ $= \sqrt[12]{2^9 : 3^{10}} = \sqrt[12]{\frac{2^9}{3^{10}}}$
SOMMA E DIFFERENZA DI RADICALI	Somma di monomi simili	Si possono sommare solo i coefficienti dei radicali simili $a + 3a = 4a$	$\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
TRASPORTO DI UN FATTORE SOTTO IL SEGNO DI RADICE	Riduzione di frazioni allo stesso denominatore	$a^p \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^p \cdot b^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{pn}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} =$ $= (a^{pn} \cdot b^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^{pn} \cdot b^m}$	$2^3 \cdot \sqrt[4]{3^3} = 2^3 \cdot 3^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{12}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}} =$ $= (2^{12} \cdot 3^3)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2^{12} \cdot 3^3}$
TRASPORTO DI UN FATTORE FUORI DAL SEGNO DI RADICE		(Sia $m > n \Rightarrow m = kn + p$) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{kn+p}{n}} = a^{\frac{kn}{n} + \frac{p}{n}} =$ $= a^{k + \frac{p}{n}} = a^k \cdot a^{\frac{p}{n}} = a^k \sqrt[n]{a^p}$	$\sqrt[11]{2^{35}} = 2^{\frac{35}{11}} = 2^{\frac{3 \cdot 11 + 2}{11}} = 2^{\frac{3 \cdot 11}{11} + \frac{2}{11}} =$ $= 2^{3 + \frac{2}{11}} = 2^3 \cdot 2^{\frac{2}{11}} = 2^3 \sqrt[11]{2^2}$
POTENZA DI UN RADICALE	Potenza di potenza	$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = a^{\frac{m}{n} \cdot p} =$ $= a^{\frac{mp}{n}} = \sqrt[n]{a^{mp}}$	$\left(\sqrt[4]{2^3}\right)^{14} = \left(2^{\frac{3}{4}}\right)^{14} = 2^{\frac{3}{4} \cdot 14} =$ $= 2^{\frac{21}{2}} = \sqrt[2]{2^{21}}$
RADICE DI RADICE	Potenza di potenza	$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{1}{p}} =$ $= a^{\frac{m}{np}} = \sqrt[np]{a^m}$	$\sqrt[21]{\sqrt[9]{2^{14}}} = \sqrt[21]{2^{\frac{14}{9}}} = \left(2^{\frac{14}{9}}\right)^{\frac{1}{21}} =$ $= 2^{\frac{2}{27}} = \sqrt[27]{2^2}$

RAZIONALIZZAZIONE	Frazione complementare rispetto all'unità	<p>Sia: $\frac{k}{n}$ frazione complementare rispetto all'unità di $\frac{m}{n}$,</p> <p>ovvero: $\frac{m+k}{n} = 1$</p> $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a}{b^{\frac{m}{n}}} = \frac{a}{b^{\frac{m}{n}}} \cdot \frac{b^{\frac{k}{n}}}{b^{\frac{k}{n}}} =$ $= \frac{a \cdot b^{\frac{k}{n}}}{b^{\frac{m+k}{n}}} = \frac{a \cdot b^{\frac{k}{n}}}{b} = \frac{a \sqrt[n]{b^k}}{b}$	$\frac{2}{\sqrt[8]{3^5}} = \frac{2}{3^{\frac{5}{8}}} = \frac{2}{3^{\frac{5}{8}}} \cdot \frac{3^{\frac{3}{8}}}{3^{\frac{3}{8}}} =$ $= \frac{2 \cdot 3^{\frac{3}{8}}}{3^{\frac{5+3}{8}}} = \frac{2 \cdot 3^{\frac{3}{8}}}{3} = \frac{2 \sqrt[8]{3^3}}{3}$
	Prodotti notevoli: differenza di quadrati	$\frac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}} = \frac{a}{b^{\frac{1}{2}} \pm c^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{b^{\frac{1}{2}} \mp c^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} \mp c^{\frac{1}{2}}} =$ $= \frac{a \left(b^{\frac{1}{2}} \mp c^{\frac{1}{2}} \right)}{b^{\frac{2}{2}} - c^{\frac{2}{2}}} = \frac{a \left(\sqrt{b} \mp \sqrt{c} \right)}{b - c}$	$\frac{14}{\sqrt{13} \pm \sqrt{6}} = \frac{14}{13^{\frac{1}{2}} \pm 6^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{13^{\frac{1}{2}} \mp 6^{\frac{1}{2}}}{13^{\frac{1}{2}} \mp 6^{\frac{1}{2}}} =$ $= \frac{14 \left(13^{\frac{1}{2}} \mp 6^{\frac{1}{2}} \right)}{13^{\frac{2}{2}} - 6^{\frac{2}{2}}} = \frac{14 \left(\sqrt{13} \mp \sqrt{6} \right)}{13 - 6} =$ $= 2 \left(\sqrt{13} \mp \sqrt{6} \right)$
	Prodotti notevoli: somma o differenza di cubi	$\frac{a}{\sqrt[3]{b} \pm \sqrt[3]{c}} = \frac{a}{b^{\frac{1}{3}} \pm c^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{b^{\frac{2}{3}} \mp b^{\frac{1}{3}} c^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}} \mp b^{\frac{1}{3}} c^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{2}{3}}} =$ $= \frac{a \left(b^{\frac{2}{3}} \mp b^{\frac{1}{3}} c^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{2}{3}} \right)}{b^{\frac{3}{3}} \pm c^{\frac{3}{3}}} = \frac{a \left(\sqrt[3]{b^2} \mp \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{c^2} \right)}{b \pm c}$	$\frac{60}{\sqrt[3]{18} \pm \sqrt[3]{3}} = \frac{60}{18^{\frac{1}{3}} \pm 3^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{18^{\frac{2}{3}} \mp 18^{\frac{1}{3}} 3^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{2}{3}}}{18^{\frac{2}{3}} \mp 18^{\frac{1}{3}} 3^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{2}{3}}} =$ $= \frac{60 \left(18^{\frac{2}{3}} \mp 18^{\frac{1}{3}} 3^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{2}{3}} \right)}{18^{\frac{3}{3}} \pm 3^{\frac{3}{3}}} =$ $= \frac{60 \left(\sqrt[3]{18^2} \mp \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{3^2} \right)}{18 \pm 3}$