

EQUAZIONE DELLA PARABOLA CON ASSE DI SIMMETRIA PARALLELO ALL'ASSE Y

Parabola come luogo geometrico:

Assegnati nel piano un punto F (fuoco) e una retta d (direttrice), si chiama parabola la curva piana luogo geometrico dei punti equidistanti da F e da d .

La retta passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice si chiama **asse della parabola**. L'asse è asse di simmetria della curva. Il punto V in cui la parabola interseca il suo asse è detto **vertice** della parabola.

Dati fuoco e direttrice determiniamo l'equazione della parabola:

Supponiamo che la direttrice d sia parallela all'asse x ; sia $y = d$ la sua equazione e sia $F(p; q)$ il fuoco, con $q \neq d$.

Sia $P(x; y)$ un punto generico della parabola; per definizione di parabola, si avrà:

$$\overline{PF} \cong \overline{PH}$$

essendo \overline{PH} la distanza del generico punto P dalla direttrice d .

Svolgendo i calcoli: $\overline{PF} = \sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2}$ $\overline{PH} = |y-d|$

Perciò: $\sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} = |y-d|$

Elevando entrambi i membri al quadrato e svolgendo i calcoli si ottiene:

$$\begin{aligned} (x-p)^2 + (y-q)^2 &= (y-d)^2 \\ x^2 - 2xp + p^2 + y^2 - 2yq + q^2 &= y^2 - 2yd + d^2 \\ 2yq - 2yd &= x^2 - 2xp + p^2 + q^2 - d^2 \\ 2y(q-d) &= x^2 - 2xp + p^2 + q^2 - d^2 \\ y &= \frac{1}{2(q-d)} x^2 - x \frac{p}{q-d} + \frac{p^2 + q^2 - d^2}{2(q-d)} \end{aligned}$$

Ponendo:

$$a = \frac{1}{2(q-d)} \quad b = -\frac{p}{q-d} \quad c = \frac{p^2 + q^2 - d^2}{2(q-d)}$$

Si ottiene l'equazione:

$$y = ax^2 + bx + c$$

che rappresenta una parabola con direttrice parallela all'asse x e asse di simmetria parallelo all'asse y .

Data l'equazione della parabola, ricaviamo le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice:

Dai calcoli svolti prima sappiamo che:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2(q-d)} \\ b = -\frac{p}{q-d} \\ c = \frac{p^2 + q^2 - d^2}{2(q-d)} \end{cases}$$

Ricaviamo p, q e d in funzione di a, b e c:

$$\begin{cases} q - d = \frac{1}{2a} \\ p = -b(q - d) \Rightarrow p = -\frac{b}{2a} \\ 2c(q - d) = p^2 + q^2 - d^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q - d = \frac{1}{2a} \\ p = -\frac{b}{2a} \\ \frac{c}{a} = p^2 + q^2 - d^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} q - d = \frac{1}{2a} \\ p = -\frac{b}{2a} \\ q^2 - d^2 = \frac{c}{a} - p^2 \Rightarrow q^2 - d^2 = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \Rightarrow q^2 - d^2 = \frac{4ac - b^2}{4a^2} \Rightarrow q^2 - d^2 = -\frac{\Delta}{4a^2} \end{cases}$$

Otteniamo quindi:

$$\begin{cases} q - d = \frac{1}{2a} \\ p = -\frac{b}{2a} \\ (q - d)(q + d) = -\frac{\Delta}{4a^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q - d = \frac{1}{2a} \\ p = -\frac{b}{2a} \\ q + d = -\frac{\Delta}{4a^2} \cdot \frac{1}{q - d} = -\frac{\Delta}{4a^2} \cdot 2a = -\frac{\Delta}{2a} \end{cases}$$

Sommando e sottraendo la prima e la terza equazione (metodo di eliminazione), otteniamo i valori di q e d:

$$\begin{cases} q - d = \frac{1}{2a} \\ q + d = -\frac{\Delta}{2a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2q = \frac{1}{2a} - \frac{\Delta}{2a} \\ -2d = \frac{1}{2a} + \frac{\Delta}{2a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{1 - \Delta}{4a} \\ d = -\frac{1 + \Delta}{4a} \end{cases}$$

Perciò il fuoco F ha coordinate:

$$F \left(-\frac{b}{2a}; \frac{1 - \Delta}{4a} \right)$$

La direttrice ha equazione:

$$y = -\frac{1 + \Delta}{4a}$$

E l'asse della parabola (ovvero la retta perpendicolare alla direttrice e passante per il fuoco) ha equazione:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Poiché il vertice V è il punto di intersezione tra la parabola e l'asse della parabola, conoscendo l'ascissa del vertice, ovvero

$x = -\frac{b}{2a}$, basta sostituirla nell'equazione della parabola:

$$y = a \left(-\frac{b}{2a} \right)^2 + b \left(-\frac{b}{2a} \right) + c = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Ovvero il vertice ha coordinate:

$$V \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

CASI PARTICOLARI

$b = 0$: L'equazione della parabola diventa $y = ax^2 + c$

Vertice: $V(0; c)$

Asse della parabola: $x = 0$ (ovvero l'asse y)

Fuoco: $F\left(0; \frac{1 + 4ac}{4a}\right)$

Direttrice: $y = -\frac{1 + 4ac}{4a}$

$c = 0$: L'equazione della parabola diventa $y = ax^2 + bx$

Vertice: $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2}{4a}\right)$

La parabola passa per l'origine degli assi cartesiani

$b = c = 0$: L'equazione della parabola diventa $y = ax^2$

Vertice: $V(0; 0) \equiv O$

Asse della parabola: $x = 0$ (ovvero l'asse y)

Fuoco: $F\left(0; \frac{1}{4a}\right)$

Direttrice: $y = -\frac{1}{4a}$

Il coefficiente a: $a > 0$ la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto (ovvero il fuoco si trova "sopra" la direttrice)
 $a < 0$ la parabola ha la concavità rivolta verso il basso (ovvero il fuoco si trova "sotto" la direttrice)
All'aumentare di a in valore assoluto, l'apertura della parabola diminuisce.

EQUAZIONE DELLA PARABOLA CON ASSE DI SIMMETRIA PARALLELO ALL'ASSE X

Svolgendo lo stesso procedimento della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y, ma scegliendo come direttrice una retta parallela all'asse y, del tipo $x = d$, si ottiene l'equazione:

$$\underline{\underline{x = ay^2 + by + c}}$$

Inoltre, il fuoco F ha coordinate: $F\left(\frac{1 - \Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$

La direttrice ha equazione: $x = -\frac{1 + \Delta}{4a}$

L'asse della parabola ha equazione: $y = -\frac{b}{2a}$

E il vertice V ha coordinate: $V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$