

Semplifica le seguenti espressioni:

- $$(a + 3)^3 + 6a(a + 3)(a - 3) + (a - 3)^3$$

$$= a^3 + 9a^2 + 27a + 27 + 6a(a^2 - 9) + a^3 - 9a^2 + 27a - 27 =$$

$$= a^3 + 9a^2 + 27a + 27 + 6a^3 - 54a + a^3 - 9a^2 + 27a - 27 = \mathbf{8a^3}$$
- $$[a^2(a - 1) - a(a^2 + 1)]^2 - a^2(a + 1)^2$$

$$= (a^3 - a^2 - a^3 - a)^2 - a^2(a^2 + 2a + 1) =$$

$$= a^4 + a^2 + 2a^3 - a^4 - 2a^3 - a^2 = \mathbf{0}$$
- $$(a - 2b)^2(a + 2b)^2 - (a^2 - ab - b^2)(a^2 - ab + b^2) + (-3ab)^2 - 17b^4$$

$$= (a^2 - 4b^2)^2 - [(a^2 - ab)^2 - b^4] + 9a^2b^2 - 17b^4 =$$

$$= a^4 + 16b^4 - 8a^2b^2 - (a^4 + a^2b^2 - 2a^3b) + b^4 + 9a^2b^2 - 17b^4 =$$

$$= a^4 + a^2b^2 - a^4 - a^2b^2 + 2a^3b = \mathbf{2a^3b}$$
- $$[x^2 + 2(x - 1)]^2 - 4x^2(x - 1) - [2(x - 1)]^2 - (x^2 - 1)^2$$

$$= x^4 + 4(x - 1)^2 + 4x^2(x - 1) - 4x^2(x - 1) - 4(x - 1)^2 - (x^4 - 2x^2 + 1)^2 =$$

$$= x^4 - x^4 + 2x^2 - 1 = \mathbf{2x^2 - 1}$$

Esegui le seguenti divisioni (con la regola di Ruffini, quando possibile) e verifica se sono giuste facendo la prova:

5. $(x^6 - 1) : (x^4 + x^2 + 1)$

x^6			-1	$x^4 + x^2 + 1$
$-x^6$	$-x^4$	$-x^2$		$x^2 - 1$
	$-x^4$	$-x^2$	-1	
	x^4	x^2	1	
			0	

$$Q(x) = x^2 - 1 \quad R(x) = 0$$

Per fare la prova, dobbiamo verificare che: $Q(x)d(x) + R(x) = D(x)$, dove $d(x)$ è il divisore e $D(x)$ il dividendo e infatti:

$$(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) + 0 = x^6 + x^4 + x^2 - x^4 - x^2 - 1 = x^6 - 1$$

6. $(2x^3 + x + 1) : (2x - 1)$

Possiamo applicare la regola di Ruffini, dividendo i coefficienti dei due termini per 2: $(x^3 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}) : (x - \frac{1}{2})$.

$\frac{1}{2}$		1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$
	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{8}$

$$Q(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \quad R(x) = \frac{7}{8} \cdot 2 = \frac{7}{4}$$

Per fare la prova, dobbiamo verificare che: $Q(x)d(x) + R(x) = D(x)$, dove $d(x)$ è il divisore e $D(x)$ il dividendo e infatti:

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)(2x - 1) + \frac{7}{4} = 2x^3 + x^2 + \frac{3}{2}x - x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + \frac{7}{4} = 2x^3 + x + 1$$

7. $(a^3 - 3b^3 - ab^2 + 2a^2b) : (a + b)$

Svolgi la divisione rispetto alla lettera a

Possiamo applicare la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & 1 & 2b & -b^2 & -3b^3 \\
 -b & & -b & -b^2 & 2b^3 \\
 \hline
 & 1 & b & -2b^2 & -b^3
 \end{array}$$

$$Q(a) = a^2 + ab - 2b^2 \quad R(a) = -b^3$$

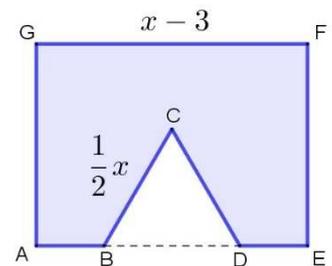
Per fare la prova, dobbiamo verificare che: $Q(a)d(a) + R(a) = D(a)$, dove $d(a)$ è il divisore e $D(a)$ il dividendo e infatti:

$$(a^2 + ab - 2b^2)(a + b) - b^3 = a^3 + a^2b + a^2b + ab^2 - 2ab^2 - 2b^3 - b^3 = a^3 + 2a^2b - ab^3 - 3b^3$$

8. L'area del rettangolo AEFG è $x^2 - 10x + 21$. Determina il perimetro di ABCDEFG, sapendo che il triangolo BCD è equilatero.

Dato che l'area del rettangolo AEFG è $x^2 - 10x + 21$ e la sua base è $x - 3$, posso determinarne l'altezza GA eseguendo la divisione:

$$\begin{array}{r|rr|r}
 & 1 & -10 & 21 \\
 3 & & 3 & -21 \\
 \hline
 & 1 & -7 & 0
 \end{array}$$

L'altezza del rettangolo misura $x - 7$. Ora dobbiamo determinare $\overline{AB} + \overline{DE}$:

$$\overline{AB} + \overline{DE} = \overline{AE} - \overline{BD} = x - 3 - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x - 3$$

$$2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FG} + \overline{GA} =$$

$$= \frac{1}{2}x - 3 + \frac{1}{2}x \cdot 2 + (x - 7) \cdot 2 + x - 3 = \frac{1}{2}x - 3 + x + 2x - 14 + x - 3 = \frac{9}{2}x - 20$$

9. L'area di un rettangolo R è $a^2 + 5ab + 6b^2$ e la base misura $a + 3b$, con $a, b > 0$. Trova l'area di un secondo rettangolo che ha altezza doppia rispetto a quella di R e base uguale a quella di R aumentata di $3b$.

Determino l'altezza del rettangolo R, eseguendo la divisione tra l'area e la base:

$$\begin{array}{r|rr|r}
 & 1 & 5b & 6b^2 \\
 -3b & & -3b & -6b^2 \\
 \hline
 & 1 & 2b & 0
 \end{array}$$

L'altezza del rettangolo R è $a + 2b$.L'altezza del nuovo rettangolo è $2(a + 2b) = 2a + 4b$, mentre la sua base è $a + 3b + 3b = a + 6b$. Possiamo determinare la nuova area:

$$Area = (a + 6b)(2a + 4b) = 2a^2 + 4ab + 12ab + 24b^2 = 2a^2 + 16ab + 24b^2$$