Determina la curva integrale dell'equazione differenziale $y' = \frac{\ln x}{x}$ passante per il punto $P(e; 1)$.

Risolvo l'equazione differenziale:

$$y = \int \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{1}{2}\ln^2 x + c$$

Impongo il passaggio per il punto P:

$$1 = \frac{1}{2} + c \qquad c = \frac{1}{2} \qquad \boldsymbol{y = \frac{1}{2}\left(\ln^2 x + 1\right)}$$

Determina la curva integrale dell'equazione $xy' = y\,(y-1)$ che, nel punto di ascissa $x = 0$, risulta tangente a una retta parallela alla bisettrice del primo quadrante.

Risolvo l'equazione differenziale a variabili separabili:

$$\int \frac{dy}{y\,(y-1)} = \int \frac{dx}{x} \qquad \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right) dy = \int \frac{dx}{x} \qquad \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln|x| + c_1$$

$$\ln\left|1 - \frac{1}{y}\right| = \ln|x| + c_1 \qquad \ln\left|\frac{1}{y} - 1\right| = \ln c_2|x| \qquad \frac{1}{y} - 1 = cx \qquad y = \frac{1}{1+cx}$$

Se nel punto di ascissa nulla, la tangente è parallela alla bisettrice del primo quadrante, allora il coefficiente angolare della tangente è 1, perciò calcolo la derivata della funzione in 0 e la pongo uguale a 1, per determinare la costante:

$$y' = -\frac{c}{(1+cx)^2} \qquad y'(0) = -\frac{c}{1} = 1 \qquad c = -1 \qquad \boldsymbol{y = \frac{1}{1-x}}$$

Considera l'equazione differenziale $y' = 2xy - 2x^3$ e, prima di risolverla, spiega perché ogni sua curva integrale, nel punto in cui interseca l'asse y, ha tangente parallela all'asse delle ascisse. Determina poi la curva integrale passante per il punto $A\ (0; 1)$.

Calcoliamo il valore della derivata prima per $x = 0$: $y'(0) = 0$. Questo è il valore del coefficiente angolare della retta tangente nel punto di ascissa nulla. Una retta con coefficiente angolare nullo è parallela all'asse delle x.
Risolvo l'equazione lineare, notando che $a(x) = 2x$ e $b(x) = -2x^3$:

$$y = e^{\int a(x)\,dx}\left[\int b(x)\, e^{-\int a(x)\,dx}\, dx + c\right] = e^{x^2}\left[\int -2x^3\, e^{-x^2}\, dx + c\right]$$

L'integrale deve essere risolto per parti:

$$f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x \qquad g'(x) = -2xe^{-x^2} \qquad g(x) = e^{-x^2}$$

$$y = e^{x^2}\left[x^2 e^{-x^2} - \int 2x\, e^{-x^2}\, dx + c\right] = e^{x^2}\left[x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + c\right] = x^2 + 1 + c\, e^{x^2}$$

Impongo il passaggio per il punto A:

$$1 = 1 + c \qquad c = 0 \qquad \boldsymbol{y = x^2 + 1}$$

Determina l'equazione della retta tangente nel punto $A\,(3; 9)$ alla curva integrale passante per A dell'equazione $y' = \frac{2}{x}y + x^2(x-2)e^x$.

Calcolo il coefficiente angolare della retta, sostituendo nella derivata prima l'ascissa di A: