1. $\frac{x\sqrt{3}(x\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-1)^2}+\frac{\sqrt{3}\,x}{\sqrt{3}-2}-2x>0$

$$\frac{x\sqrt{3}(x\sqrt{3}+2)}{3+1-2\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}\,x}{\sqrt{3}-2}-2x>0 \qquad \frac{3x^2+2x\sqrt{3}}{2\,(2-\sqrt{3})}-\frac{\sqrt{3}\,x}{2-\sqrt{3}}-2x>0$$

$$3x^2+2x\sqrt{3}-2x\sqrt{3}-8x+4x\sqrt{3}>0 \qquad x\left(3x+4\sqrt{3}-8\right)>0 \qquad \left\langle \begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=\dfrac{8-4\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$

$$\boldsymbol{x<0 \quad \vee \quad x>\frac{8-4\sqrt{3}}{3}}$$

2. $\begin{cases} x^2=x+xy \\ (2+x)^2-4x=(y+1)^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} x\,(x-1-y)=0 \\ (2+x)^2-4x=(y+1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ 4=(y+1)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ y+1=\pm 2 \end{cases} \qquad \boldsymbol{\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} x=1+y \\ 4+4x+x^2-4x=(y+1)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1+y \\ 4+(1+y)^2=(y+1)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1+y \\ 4=0 \end{cases} \qquad imp.$$

3. $\begin{cases} x-2y-1=0 \\ \frac{x}{3y+2}+\frac{y}{y-x}=\frac{5}{3y^2-3xy+2y-2x} \end{cases}$

$$\begin{cases} x-2y-1=0 \\ \dfrac{x}{3y+2}+\dfrac{y}{y-x}=\dfrac{5}{(3y+2)(y-x)} \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2y-1=0 \\ x\,(y-x)+y\,(3y+2)=5 \end{cases} \qquad C.A.: \begin{cases} y\neq x \\ y\neq -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2y+1 \\ (2y+1)(-y-1)+3y^2+2y-5=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=2y+1 \\ -2y^2-3y-1+3y^2+2y-5=0 \end{cases}$$

$$y^2-y-6=0 \qquad y_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\left\langle \begin{array}{l} 3 \\ -2 \end{array}\right.$$

$$\boldsymbol{\begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}} \qquad acc.$$

4. $\begin{cases} y^2-z^2=7 \\ x-y+z=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} y^2-z^2=7 \\ x-y+z=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z=3x \\ y=4x \\ 16x^2-9x^2=7 \end{cases} \qquad \boldsymbol{\begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\pm 4 \\ z=\pm 3 \end{cases}}$$

5. Determina per quali valori di b la somma delle radici di $(1+b^2-2b)\,x^2+(4b-9)\,x+4=0$ è maggiore di 1.

$$\begin{cases}\Delta \geq 0\\ \dfrac{-4b+9}{1+b^2-2b}>1\end{cases} \qquad \begin{cases}(4b-9)^2-16\,(1+b^2-2b)\geq 0\\ \dfrac{-4b+9-1-b^2+2b}{(1-b)^2}>0\end{cases} \qquad \begin{cases}16b^2+81-72b-16-16b^2+32\,b\geq 0\\ b^2+2b-8<0 \quad \wedge \quad b\neq 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}-40b\geq -65\\ (b+4)(b-2)<0 \quad \wedge \quad b\neq 1\end{cases} \qquad \begin{cases}b\leq \dfrac{13}{8}\\ -4<b<2 \quad \wedge \quad b\neq 1\end{cases} \qquad \boldsymbol{-4<b<1 \ \vee\ 1<b\leq \frac{13}{8}}$$

6. Trova quali numeri reali sono tali che il quadrato della metà del numero sommato al quadrato del numero stesso è maggiore del triplo del numero diminuito di 1.

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+x^2>3x-1 \qquad \frac{x^2}{4}+x^2-3x+1>0 \qquad 5x^2-12x+4>0$$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{5}=\begin{cases}2\\ \dfrac{2}{5}\end{cases} \qquad \boldsymbol{x<\frac{2}{5} \ \vee\ x>2}$$

7. Scegli **uno** dei seguenti problemi:

A. Trova due numeri tali che la loro differenza sia 1 e la somma dei loro cubi sia 9.

$$\begin{cases}x-y=1\\ x^3+y^3=9\end{cases} \qquad \begin{cases}x=y+1\\ (y+1)^3+y^3=9\end{cases} \qquad \begin{cases}x=y+1\\ 2y^3+3y^2+3y-8=0\end{cases}$$

Applicando la regola di Ruffini alla seconda equazione che è tale che $P(1)=0$, otteniamo:

$$\begin{cases}x=y+1\\ 2y^2+5y+8=0\end{cases} \qquad \begin{cases}x=y+1\\ \Delta<0\end{cases} \quad imp. \qquad \boldsymbol{\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}}$$

B. La somma dei quadrati di due numeri è 1201, mentre la differenza dei loro quadrati è 49. Determina i due numeri.

$$\begin{cases}x^2+y^2=1201\\ x^2-y^2=49\end{cases} \qquad \begin{cases}2x^2=1250\\ 2y^2=1152\end{cases} \qquad \begin{cases}x^2=625\\ y^2=576\end{cases} \qquad \boldsymbol{\begin{cases}x=\pm 25\\ y=\pm 24\end{cases}}$$

8. Scegli **uno** dei seguenti problemi:

A. In un triangolo rettangolo un cateto è uguale al triplo dell'altro cateto aumentato di 4. Quali valori può assumere il secondo cateto, in cm, in modo che l'area sia compresa tra $32\ cm^2$ e $240\ cm^2$?

Indico uno dei cateti con x e l'altro con $3x+4$. L'area del triangolo è quindi data da: $\frac{x\,(3x+4)}{2}$ ed è compresa tra i due valori dati:

$$32\leq \frac{x\,(3x+4)}{2}\leq 240 \qquad \begin{cases}3x^2+4x\geq 64\\ 3x^2+4x\leq 480\end{cases}$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm 14}{3}=\begin{cases}4\\ -\frac{16}{3}\end{cases} \qquad x_{1,2}=\frac{-2\pm 38}{3}=\begin{cases}12\\ -\frac{40}{3}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x<-\frac{16}{3} \ \vee\ x>4\\ -\frac{40}{3}<x<12\end{cases} \qquad \boldsymbol{4<x<12}$$

B. Un quadrato e un rettangolo hanno lo stesso perimetro. L'area del quadrato supera di $4\ cm^2$ l'area del rettangolo, mentre l'area del quadrato costruito sulla diagonale del rettangolo è di $106\ cm^2$. Determina le lunghezze dei lati del rettangolo.

Indico con x il lato del quadrato e con y e z le dimensioni del rettangolo:

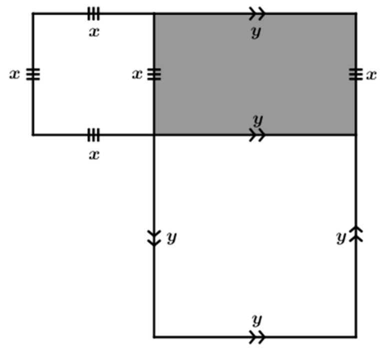
$$\begin{cases} 4x = 2y + 2z \\ x^2 = 4 + yz \\ y^2 + z^2 = 106 \end{cases} \qquad \begin{cases} y + z = 2x \\ yz = x^2 - 4 \\ (y+z)^2 - 2yz - 106 = 0 \end{cases} \qquad 4x^2 - 2\,(x^2 - 4) - 106 = 0$$

$$2x^2 - x^2 + 4 - 53 = 0 \qquad x^2 = 49 \qquad x = 7\ cm$$

$$\begin{cases} y + z = 14 \\ yz = 45 \end{cases} \qquad t^2 - 14\,t + 45 = 0 \qquad t_{1,2} = 7 \pm 2 = \left\langle \begin{matrix} 9 \\ 5 \end{matrix} \right.$$

I lati del rettangolo hanno lunghezza $\mathbf{9\ cm}$ e $\mathbf{5\ cm}$.

9. L'area complessiva dei tre quadrilateri in figura 1 è di $372\ cm^2$ e l'area del rettangolo colorato è di $112\ cm^2$. Calcola il perimetro della figura intera.



Indicate con x e y le dimensioni come in figura, otteniamo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 372 \\ xy = 112 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x+y)^2 - xy = 372 \\ xy = 112 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x+y)^2 = 484 \\ xy = 112 \end{cases}$$

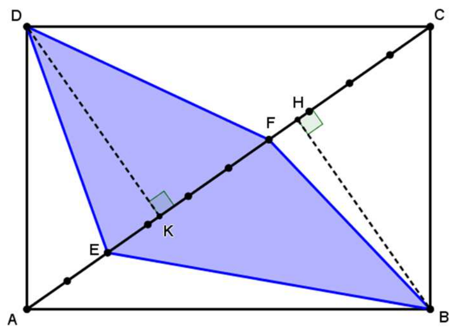
Trattandosi di lunghezze, teniamo solo le soluzioni positive, perciò:

$$\begin{cases} x + y = 22 \\ xy = 112 \end{cases}$$

Il perimetro della figura è dato da:

$$4x + 4y = 4\,(x+y) = 4 \cdot 22\ cm = \mathbf{88\ cm}$$

10. Un rettangolo ha i lati di 15 cm e di 21 cm. La diagonale è divisa in dieci segmenti congruenti, come in figura 2. Quanto misura l'area della zona scura?



Considero il triangolo ABC e traccio l'altezza BH. Considero il triangolo ACD e traccio l'altezza DK. I due triangoli sono congruenti in quanto metà di un rettangolo, hanno la base in comune e le due altezze congruenti ($\overline{BH} = \overline{DK} = h$).

Considero i triangoli EFD e BFE: essi hanno la base in comune, EF, che è pari a $\frac{4}{10}\overline{AC}$ e l'altezza congruente (in quanto coincidenti con quelle dei triangoli ABC e ACD).

L'altezza h è data da:

$$h = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{\overline{AC}}$$

L'area della parte colorata è data da:

$$A = 2 \cdot \frac{4}{10}\overline{AC} \cdot h = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10}\overline{AC} \cdot \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{2}{5}\,\overline{AB} \cdot \overline{BC} = \mathbf{126\ cm^2}$$