1. Considera la funzione:

$$f(x)=\begin{cases} x\ln x^2 & per\ x\neq 0 \\ 0 & per\ x=0 \end{cases}$$

Dopo aver enunciato il teorema di Rolle, stabilisci se è possibile applicarlo alla funzione f nell'intervallo $[-1;1]$. E negli intervalli $[-1;0]$ e $[0;1]$? In caso affermativo, determina il punto c la cui esistenza è garantita dal teorema.

Teorema di Rolle: Data una funzione $f(x)$ definita in un intervallo limitato e chiuso $[a;b]$ tale che sia continua in tale intervallo, derivabile nell'intervallo aperto $(a;b)$ e $f(a)=f(b)$, allora esiste almeno un punto c, interno all'intervallo, per il quale risulta $f'(c)=0$.

La funzione è continua in ogni tratto, resta quindi da verificare che sia continua nel punto $x=0$, ovvero:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x^2 = \lim_{x\to 0^-} x\ln x^2 = f(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x^2 = \lim_{x\to 0^+} 2x\ln x = 2\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} 2\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$$

$$\lim_{x\to 0^-} x\ln x^2 = \lim_{x\to 0^-} 2x\ln(-x) = 2\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(-x)}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} 2\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$$

La funzione è continua nel punto $x=0$. Faccio la derivata per verificare che sia derivabile nel punto $x=0$:

$$f'(x)=\begin{cases} \ln x^2+2 & per\ x\neq 0 \\ 0 & per\ x=0 \end{cases}$$

Verifico la derivabilità in $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^+}(\ln x^2+2)=-\infty \qquad \lim_{x\to 0^-}(\ln x^2+2)=-\infty$$

In $x=0$ la funzione non è derivabile, ovvero ha un punto di flesso a tangente verticale discendente.
Perciò, non valendo la seconda ipotesi del teorema di Rolle, esso non è applicabile nell'intervallo $[-1;1]$.

La funzione è invece continua in $[-1;0]$ e derivabile in $(-1;0)$, inoltre:

$$f(-1)=0 \qquad f(0)=0$$

Perciò la terza ipotesi è verificata. Posso quindi determinare il punto c in modo tale che $f'(c)=0$:

$$\ln c^2+2=0 \qquad 2\ln(-c)=-2 \qquad \ln(-c)=-1 \qquad -c=\frac{1}{e} \qquad \boldsymbol{c=-\frac{1}{e}}$$

Analogamente, la funzione è continua in $[0;1]$ e derivabile in $(0;1)$, inoltre:

$$f(1)=0 \qquad f(0)=0$$

Perciò la terza ipotesi è verificata. Posso quindi determinare il punto c in modo tale che $f'(c)=0$:

$$\ln c^2+2=0 \qquad 2\ln c=-2 \qquad \ln c=-1 \qquad \boldsymbol{c=\frac{1}{e}}$$

2. Determina i parametri a, b e c in modo che la funzione:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax+2b}{x-1} & per\ -2\le x\le -1\\ x^2+2cx & per\ -1<x\le 1\end{cases}$$

soddisfi le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-2;1]$.

Devo innanzi tutto verificare la continuità nell'intervallo $[-2,1]$. Visto che i due tratti della funzione sono continui negli intervalli dati, verifico la continuità in $x=-1$:

$$\lim_{x\to-1^+}(x^2+2cx)=\lim_{x\to-1^-}\frac{ax+2b}{x-1}=f(-1)\quad\Rightarrow\quad 1-2c=\frac{a-2b}{2}$$

Derivo la funzione:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-a-2b}{(x-1)^2} & per\ -2\le x\le -1\\ 2x+2c & per\ -1<x\le 1\end{cases}$$

È derivabile nei due tratti, perciò verifico la derivabilità in $x=-1$:

$$\lim_{x\to-1^+}(2x+2c)=\lim_{x\to-1^-}\frac{-a-2b}{(x-1)^2}\quad\Rightarrow\quad -2+2c=\frac{-a-2b}{4}$$

Deve valere inoltre $f(-2)=f(1)$:

$$-\frac{-2a+2b}{3}=1+2c$$

Risolvo ora il sistema dato dalle tre condizioni:

$$\begin{cases}1-2c=\dfrac{a-2b}{2}\\ -2+2c=\dfrac{-a-2b}{4}\\ -\dfrac{-2a+2b}{3}=1+2c\end{cases}\qquad\begin{cases}a-2b+4c=2\\ a+2b+8c=8\\ 2a-2b-6c=3\end{cases}\qquad\begin{cases}2a+12c=10\\ 3a+2c=11\\ a-2b+4c=2\end{cases}\qquad\begin{cases}a=5-6c\\ 15-18c+2c=11\\ a-2b+4c=2\end{cases}\qquad\begin{cases}\boldsymbol{a=\dfrac{7}{2}}\\ \boldsymbol{b=\dfrac{5}{4}}\\ \boldsymbol{c=\dfrac{1}{4}}\end{cases}$$

3. Si può affermare che la funzione $f(x)=arc\tan x+arc\tan\frac{1}{x}$ è costante nell'intervallo $[3;5]$? Motiva la tua risposta.

Una conseguenza del teorema di Lagrange dimostra che se una funzione $f(x)$ è continua in un intervallo chiuso e limitato, derivabile in punti interni dell'intervallo e tale che la sua derivata sia nulla in ogni punto interno dell'intervallo, allora essa è costante in tutto l'intervallo chiuso e limitato.
La funzione data è continua per $x\neq 0$ e derivabile in tutto il dominio, come vediamo calcolando la derivata:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$$

Dalla verifica delle ipotesi del teorema deduco che la funzione è costante nell'intervallo $[3;5]$.

4. Stabilisci in quali intervalli la funzione $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-5}$ è crescente.

Determino innanzi tutto il dominio della funzione:

$$\begin{cases} x^2-4x+3\geq 0 \\ x-5\neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-3)(x-1)\geq 0 \\ x\neq 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\leq 1 \quad \vee \quad x\geq 3 \\ x\neq 5 \end{cases}$$

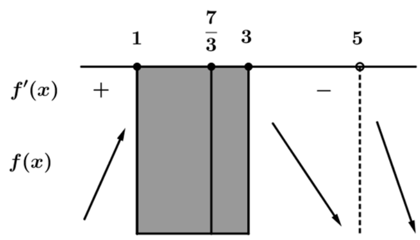
$$D=\left]-\infty;1\right]\cup\left[3;5\right[\cup\left]5;+\infty\right[$$

Determino la derivata della funzione:

$$f'(x)=\frac{\frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+3}}\cdot(x-5)-\sqrt{x^2-4x+3}}{(x-5)^2}=\frac{(x-2)(x-5)-(x^2-4x+3)}{(x-5)^2\sqrt{x^2-4x+3}}=\frac{x^2-7x+10-x^2+4x-3}{(x-5)^2\sqrt{x^2-4x+3}}$$

$$f'(x)=\frac{-3x+7}{(x-5)^2\sqrt{x^2-4x+3}}>0$$

$$-3x+7>0 \qquad x<\frac{7}{3}$$



La funzione è crescente nell'intervallo $\left]-\infty;1\right]$.

5. Un punto materiale si muove su una retta secondo la legge oraria $x(t)=at^2+t^3$ in unità SI. Determina il valore del parametro a, sapendo che la velocità nell'istante $t=2s$ è uguale a quella nell'istante $t=1s$.

Determino innanzi tutto la velocità, calcolando la derivata della legge oraria rispetto al tempo:

$$v(t)=x'(t)=2at+3t^2$$

Pongo la velocità nell'istante $t=2s$ uguale a quella nell'istante $t=1s$, sostituendo i due istanti nell'espressione della velocità:

$$v(2)=4a+12 \qquad v(1)=2a+3$$

$$4a+12=2a+3 \qquad 2a=-9 \qquad a=\boldsymbol{-4,5\ m/s^2}$$

6. Date le funzioni:

$$f(x)=(\ln x)^3 \qquad g(x)=\ln x$$

dopo aver enunciato il teorema di Cauchy e aver stabilito se sussistono tutte le condizioni richieste, determina le ascisse dei punti che verificano il teorema nell'intervallo $[e^{-2};e]$.

<u>Teorema di Cauchy</u>: Se le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono tali che sono entrambe continue nell'intervallo $[a;b]$, sono derivabili in ogni punto interno a questo intervallo, $g'(x)\neq 0$ per ogni punto interno all'intervallo, allora esiste almeno un punto c interno ad $[a;b]$ in cui si ha:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Le due funzioni sono entrambe continue per $x>0$ e quindi all'interno dell'intervallo $[e^{-2};e]$, ne determiniamo le derivate:

$$f'(x)=3\frac{(\ln x)^2}{x} \qquad g'(x)=\frac{1}{x}$$

dalle quali deduciamo che sono derivabili in $]e^{-2};e[$ e che $g'(x)\neq 0$ per ogni punto dell'intervallo aperto. Determino quindi c:

$$\frac{(\ln e^{-2})^3-(\ln e)^3}{\ln e^{-2}-\ln e}=3\frac{(\ln x)^2}{x}:\frac{1}{x} \qquad \frac{(-2)^3-1}{-2-1}=3\,(\ln x)^2 \qquad (\ln x)^2=1 \qquad \ln x=\pm 1$$

$\ln x=1 \qquad x=e$ non accettabile, perché non interno all'intervallo dato.

$$\ln x=-1 \qquad x=\boldsymbol{\frac{1}{e}}$$

Calcola i seguenti limiti:

7. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x + x\cos x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\cos x + \cos x - x\sin x} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

8. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}}{x-\sin x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x - \cos x\ e^{\sin x}}{1-\cos x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x + \sin x\ e^{\sin x} - \cos^2 x\ e^{\sin x}}{\sin x} \overset{H}{=}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x + \cos x\ e^{\sin x} + \sin x\cos x\ e^{\sin x} + 2\cos x \sin x\ e^{\sin x} - \cos^3 x\ e^{\sin x}}{\cos x} = \mathbf{1}$$

9. $$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln\ (x^4+2)}{x^3} \overset{H}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{4x^3}{x^4+2}}{3x^2} = \lim_{x\to +\infty}\frac{4x}{3\ (x^4+2)} = \mathbf{0}$$

10. $$\lim_{x\to 2^-}\frac{e^{\frac{1}{2-x}}}{\ln(2-x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 2^-}\frac{\frac{1}{(2-x)^2}\ e^{\frac{1}{2-x}}}{\frac{-1}{2-x}} = \lim_{x\to 2^-}\frac{e^{\frac{1}{2-x}}}{x-2} = -\infty$$

11. $$\lim_{x\to +\infty}\left(x\ e^{-x^2}\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{x}{e^{x^2}} \overset{H}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{2x\ e^{x^2}} = \mathbf{0}$$

12. $$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = \mathbf{0}$$

13. $$\lim_{x\to 0}\ (e^x+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\ e^{\ln(e^x+x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0}\ e^{\frac{\ln(e^x+x)}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\ e^{\frac{e^x+1}{e^x+x}} = \boldsymbol{e^2}$$

14. $$\lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin x}{\ln(1+x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{3x^2\sin x + x^3\cos x}{\frac{1}{1+x}} = \mathbf{0}$$

15. $$\lim_{x\to 0}\frac{arc\tan x}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2x\ (1+x^2)} = \infty$$

16. $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}} = \lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right)\sqrt{x^2-1}}{2x\sqrt{x}\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right)\sqrt{x+1}}{2x\sqrt{x}} = \mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$