1. Risolvi graficamente il sistema: $\begin{cases} 5x-2y=3 \\ 2x+y=-6 \end{cases}$

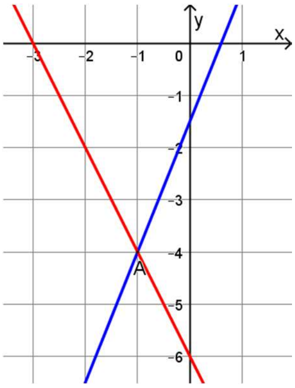
Scrivendo le equazioni delle rette in forma esplicita:

$$y=\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}$$

Ovvero con ordinata all'origine $-\frac{3}{2}$ e coefficiente angolare $\frac{5}{2}$.
La retta è rappresentata in blu.

$$y=-2x-6$$

Ovvero con ordinata all'origine -6 e coefficiente angolare -2.
La retta è rappresentata in rosso.
Le coordinate del punto di intersezione A sono la soluzione del sistema.



$\begin{cases} \boldsymbol{x=-1} \\ \boldsymbol{y=-4} \end{cases}$

2. Risolvi e discuti il seguente sistema: $\begin{cases} (k-3)\,x-y=k \\ 2x+\ y=-1 \end{cases}$

Applico il metodo di Cramer:

$$D=\begin{vmatrix} k-3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=k-3+2=k-1$$

$$D_x=\begin{vmatrix} k & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=k-1$$

$$D_y=\begin{vmatrix} k-3 & k \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-k+3-2k=-3k+3=-3\,(k-1)$$

Se $\boldsymbol{k=1}$: $\begin{cases} -2x-y=1 \\ 2x+y=-1 \end{cases}$ $\quad$ ***sistema indeterminato***

Se $\boldsymbol{k\neq 1}$: $\begin{cases} \boldsymbol{x=1} \\ \boldsymbol{y=-3} \end{cases}$

3. Un numero naturale di tre cifre è tale che la cifra delle centinaia, aumentata di 2, è il triplo di quella delle unità, la cifra delle decine è uguale alla semisomma delle altre due cifre diminuita di 2 e la differenza tra la cifra delle centinaia e quella delle unità è il doppio di quella delle decine. Trova il numero.

Il numero da determinare è $N=100x+10y+z$:

$\begin{cases} x+2=3z \\ y=\dfrac{x+z}{2}-2 \\ x-z=2y \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x+2=3z \\ x+z-2y=4 \\ x-z-2y=0 \end{cases}$ $\quad$ *sottraendo la terza dalla seconda …* $\quad$ $\begin{cases} z=2 \\ x=4 \\ 4+2-2y=2 \end{cases}$ $\quad$ $\boldsymbol{N=412}$

4. Il polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$ è tale che $P(1) = P\left(-\frac{7}{2}\right) = 1$ e $P(-5) = 19$. Determina il polinomio.

Calcolo innanzi tutto $P(1)$, $P\left(-\frac{7}{2}\right)$, e $P(5)$:

$$P(1) = a + b + c \qquad P\left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{49}{4}a - \frac{7}{2}b + c \qquad P(-5) = 25a - 5b + c$$

Le condizioni date diventano, quindi, tre equazioni per determinare i tre parametri:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ \frac{49}{4}a - \frac{7}{2}b + c = 1 \\ 25\,a - 5b + c = 19 \end{cases}$$

Sottraendo la prima dalla terza, ottengo il valore del parametro b in funzione del parametro a:

$$24a - 6b = 18 \qquad b = 4a - 3$$

Sostituendo il valore così ottenuto nella seconda equazione, otteniamo il parametro c in funzione di a e poi sostituisco tutto nella prima equazione:

$$\frac{49}{4}a - 14a + \frac{21}{2} + c = 1 \qquad \begin{cases} a + 4a - 3 + \frac{7}{4}a - \frac{19}{2} = 1 \\ b = 4a - 3 \\ c = \frac{7}{4}a - \frac{19}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \\ c = -6 \end{cases} \qquad \boldsymbol{P(x) = 2x^2 + 5x - 6}$$

5. Il perimetro di un rettangolo supera di 2 mm quello di un quadrato, che a sua volta supera di 7 mm il semiperimetro del rettangolo. Sapendo che il rapporto tra il doppio del lato del quadrato e l'altezza del rettangolo è uguale a 1,6, calcola l'area del quadrato e quella del rettangolo.

Indico con x e y le dimensioni del rettangolo, rispettivamente base e altezza, mentre con z il lato del quadrato. Le tre condizioni diventano quindi:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 2 + 4z \\ 4z = 7 + x + y \\ \frac{2z}{y} = 1{,}6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x + y - 4z = -7 \\ \frac{2z}{y} = 1{,}6 \end{cases}$$

Sottraendo la seconda dalla prima, otteniamo il lato del quadrato:

$$2z = 8 \qquad z = 4$$

Ora il sistema diventa di due equazioni in due incognite, ma dalla terza equazione ricavo velocemente l'altezza del rettangolo:

$$y = \frac{2z}{1{,}6} = 5 \qquad x + 5 - 8 = 1 \qquad x = 4$$

Perciò le due aree sono:

$$\boldsymbol{A_{rett} = 20\ mm^2} \qquad \boldsymbol{A_{quadr} = 16\ mm^2}$$

6. $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determina i valori di a, b e c, sapendo che: $P(-2) = 1$; se si divide $P(x)$ per $x + 1$ o $x - 1$, si ottiene lo stesso resto; $P(2) - P(-3) = 20$.

La seconda condizione, ovvero che dividendo il polinomio per $x + 1$ o $x - 1$ ottengo lo stesso resto, è un'applicazione del teorema del resto ed equivale a dire che: $P(-1) = P(1)$.

Calcolo innanzi tutto $P(1)$, $P(-1)$, $P(-2)$, $P(2)$ e $P(-3)$:

$$P(1) = 1 + a + b + c \qquad P(-1) = -1 + a - b + c$$

$$P(-2) = -8 + 4a - 2b + c \qquad P(2) = 8 + 4a + 2b + c \qquad P(-3) = -27 + 9a - 3b + c$$

Le condizioni date diventano, quindi, tre equazioni per determinare i tre parametri:

$$\begin{cases} -8 + 4a - 2b + c = 1 \\ 1 + a + b + c = -1 + a - b + c \\ 8 + 4a + 2b + c + 27 - 9a + 3b - c = 20 \end{cases}$$

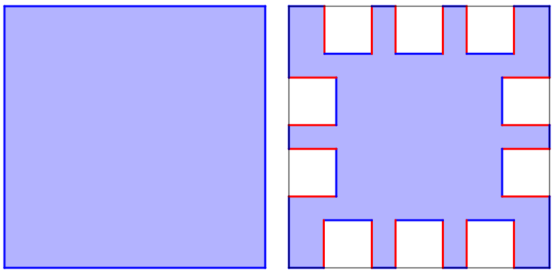
Dalla seconda equazione ricavo il parametro b e sostituendo il valore nella terza, ottengo il parametro a:

$$b = -1 \qquad -5a - 5 + 35 = 20 \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

Sostituendo i valori così ottenuto nella prima equazione, otteniamo il parametro c:

$$-8 + 8 + 2 + c = 1 \qquad \begin{cases} \boldsymbol{a = 2} \\ \boldsymbol{b = -1} \\ \boldsymbol{c = -1} \end{cases}$$

7. Dal quadrato della figura A puoi ottenere, ritagliando dieci quadretti tutti uguali, la figura B. Determina le misure dei lati della figura A e di ogni quadretto, sapendo che il perimetro della figura B è inferiore di 4 cm rispetto al doppio del perimetro della figura A e che la somma dei perimetri delle due figure è 128 cm.



Indico con x il lato del quadrato grande e con y il lato dei quadrati piccoli. Il perimetro della nuova figura (come si evince dalla figura a lato) è uguale a quello del quadrato di partenza a cui vengono sottratti 20 lati dei quadrati più piccoli (indicati in rosso nella figura a lato):

$$\begin{cases} 4x + 20y = -4 + 8x \\ 4x + 20y + 4x = 128 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x - 20y = 4 \\ 8x + 20y = 128 \end{cases}$$

Sommando le due equazioni, otteniamo: $12\,x = 132 \qquad x = 11$.
Dalla prima equazione posso ottenere il lato dei quadrati più piccoli: $44 - 20y = 4 \qquad y = 2$
Possiamo concludere che il quadrato grande ha lato **11 cm**, mentre quello piccolo ha lato **2 cm**.

8. Dati tre punti A, B, C, determina un punto P in modo che i triangoli ABP e BCP siano entrambi isosceli con vertice P. Dimostra quindi che, se tale punto esiste, anche il triangolo ACP è isoscele con vertice nel punto P.

Per determinare un punto P, traccio l'asse del segmento AB – ovvero il luogo geometrico dei punti del piano equidistante dagli estremi del segmento – e l'asse del segmento BC: ottengo il punto P come intersezione dei due assi. Ovviamente questo è possibile solo quando i tre punti A, B e C non sono allineati.
I triangoli ABP e BCP sono quindi isosceli come richiesto e, in particolare:

$$AP \cong PB \quad e \quad PB \cong PC$$

Perciò, per la proprietà transitiva della congruenza:

$$AP \cong PC$$

Quindi anche il triangolo APC è isoscele.