

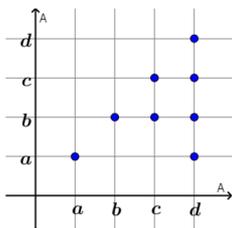
1. Dati gli insiemi $A = \{a \in \mathbb{Z} \mid -4 < a < 1\}$ e $B = \{b \in \mathbb{N} \mid b \leq 3\}$, per ognuna delle seguenti relazioni \mathcal{R} in $A \times B$ completa la seguente tabella:

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a + b > 0$$

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow |a| > b$$

Rappresentazione per elencazione	Rappresentazione sagittale	Dominio e Codominio	Relazione inversa (per elencazione)
$\mathcal{R} = \{(0,1); (0,2); (0,3); (-1,2); (-1,3); (-2,3)\}$		$D = \{0, -1, -2\}$ $C = \{1, 2, 3\}$	$\mathcal{R}^{-1} = \{(1,0); (2,0); (3,0); (2,-1); (3,-1); (3,-2)\}$
$\mathcal{R} = \{(-1,0); (-2,0); (-2,1); (-3,0); (-3,1); (-3,2)\}$		$D = \{-1, -2, -3\}$ $C = \{0, 1, 2\}$	$\mathcal{R}^{-1} = \{(0,-1); (0,-2); (1,-2); (0,-3); (1,-3); (2,-3)\}$

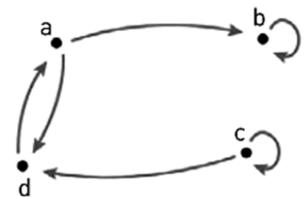
2. Analizza le proprietà delle relazioni, definite in $A = \{a, b, c, d\}$, che hanno le seguenti rappresentazioni:



Riflessiva, Antisimmetrica, Transitiva

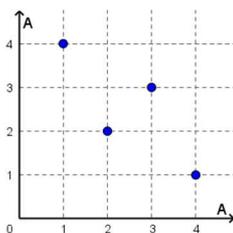
$A \setminus A$	a	b	c	d
a				X
b			X	X
c		X		X
d	X	X	X	

Simmetrica, Antiriflessiva

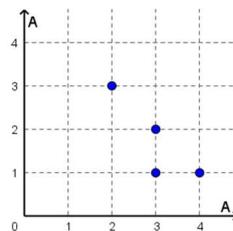


Nessuna proprietà

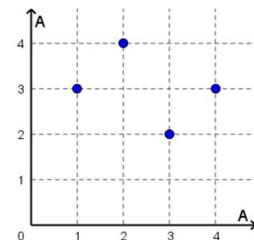
3. Stabilisci per ogni diagramma cartesiano se la relazione rappresentata è una funzione e, in tal caso, se è iniettiva o suriettiva:



Funzione iniettiva e suriettiva



Non è una funzione

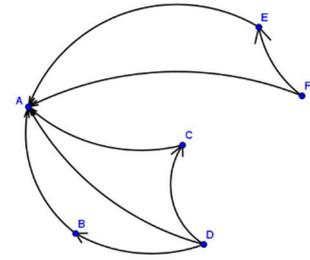
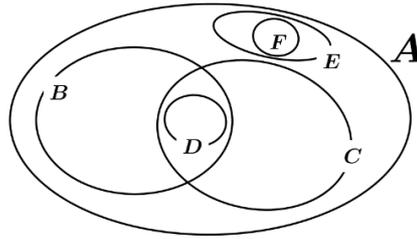


Funzione, né iniettiva né suriettiva

4. Considera il diagramma di Venn a lato e la relazione definita in $\{A, B, C, D, E, F\}$:

$$aRb \leftrightarrow a \subset b$$

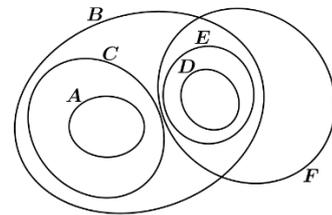
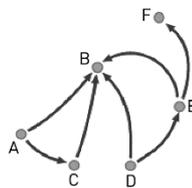
Rappresenta la relazione con un grafo.



Stabilisci se la relazione è di ordine e, in caso affermativo, specifica se è di ordine stretto o largo, totale o parziale.

Antiriflessiva, Antisimmetrica, Transitiva, perciò: relazione d'ordine stretto e parziale

5. Nel grafo è descritta la relazione \subset fra alcuni insiemi. Disegna un diagramma di Eulero-Venn con insiemi tali da soddisfare la relazione.



6. Cinque studentesse hanno gareggiato nei 100 metri. Bruno, un loro compagno un po' pasticcione, deve scrivere un articolo per il giornale scolastico. Purtroppo ha smarrito l'ordine d'arrivo. Tuttavia riesce a ricordare che:
- A. Daniela ha preceduto Elena e Barbara;
 - B. Carla è arrivata prima;
 - C. Anna ha preceduto Daniela;
 - D. Elena ha preceduto Barbara.

Elencare le coppie della relazione « x ha preceduto y » che puoi ricavare dalle quattro informazioni fornite, utilizzando per semplicità le lettere iniziali dei nomi:

$$(D; E), (D; B), (C; D), (C; E), (C; B), (C; A), (A; D), (E; B)$$

Aiuta Bruno, scrivendo l'ordine di arrivo:

Carla, Anna, Daniela, Elena, Barbara

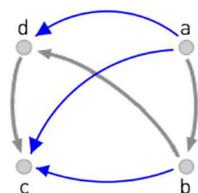
7. Considera la relazione «avere la stessa altezza», definita nell'insieme delle persone. Si tratta di una relazione di equivalenza? Spiega. Considera ora la relazione, definita nello stesso insieme, «non avere la stessa altezza». È ancora una relazione di equivalenza? Di quali proprietà gode?

La relazione «avere la stessa altezza» è una relazione di equivalenza, infatti gode delle proprietà:

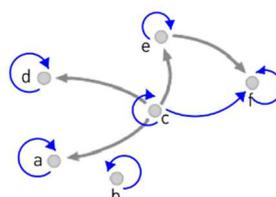
- riflessiva: perché ogni persona ha la stessa altezza di se stessa
- simmetrica: perché se A ha la stessa altezza di B, anche B ha la stessa altezza di A
- transitiva: perché se A ha la stessa altezza di B e B ha la stessa altezza di C, allora A e C hanno la stessa altezza.

La relazione «non avere la stessa altezza» non è di equivalenza e gode delle proprietà antiriflessiva e simmetrica.

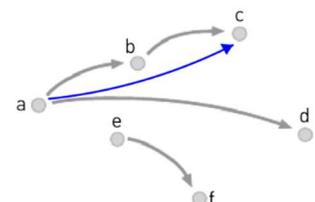
8. Completa con il numero minimo di frecce i seguenti grafi, in modo da ottenere la relazione d'ordine indicata



Ordine stretto



Ordine largo e parziale



Ordine stretto e parziale

9. Per ciascuna delle seguenti funzioni f definite in A , determina il codominio C e stabilisci se $f: A \rightarrow C$ è una funzione invertibile. In caso affermativo, scrivi l'espressione analitica della corrispondente funzione inversa.

$$f: x \rightarrow x^2 - 1 \quad A = \{-2, -1, 0, 2, 3\} \quad C = \{-1, 0, 3, 8\}$$

È invertibile? **NO**

$$f: x \rightarrow \frac{5}{x+1} \quad A = \{-2, 0, 1, 2\} \quad C = \left\{-5, 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}\right\}$$

È invertibile? **SI** $f^{-1}(y) = \frac{5-y}{y}$

10. Data la funzione $f: x \rightarrow 2x - 1$ con $x \in \mathbb{N}$, determina:

la controimmagine di 5: **3**

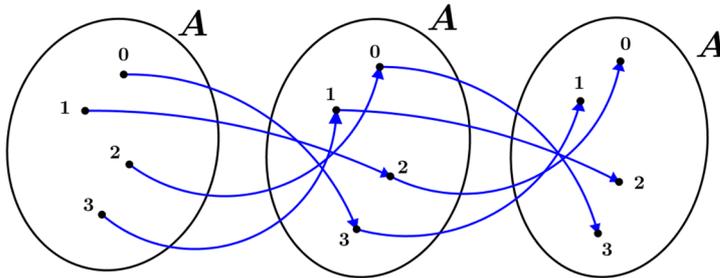
la controimmagine di 23: **12**

4 appartiene al codominio di f ? **NO, perché la sua controimmagine non è reale**

11. Considera l'insieme $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e la funzione $f: A \rightarrow A$ così definita:

$$f(0) = 3 \quad f(1) = 2 \quad f(2) = 0 \quad f(3) = 1$$

Calcola, dopo aver fatto la rappresentazione sagittale:



$$\begin{aligned} f(f(0)) &= \mathbf{1} \\ f(f(1)) &= \mathbf{0} \\ f(f(2)) &= \mathbf{3} \\ f(f(3)) &= \mathbf{2} \end{aligned}$$

12. Supponi che $f(x) = ax + b$, dove a e b sono numeri reali. Dato che $f(f(f(x))) = 8x + 21$, qual è il valore di $a + b$?

$$f(f(f(x))) = f(f(ax + b)) = f(a(ax + b) + b) = f(a^2x + ab + b) = a(a^2x + ab + b) + b = a^3x + a^2b + ab + b$$

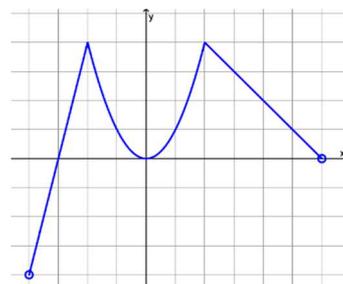
Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} a^3 = 8 \\ a^2b + ab + b = 21 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2 \\ 4b + 2b + b = 21 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \quad a + b = \mathbf{5}$$

13. Nel piano cartesiano a lato, rappresenta la seguente funzione:

$$y = \begin{cases} 4x + 12 & \text{se } -4 < x \leq -2 \\ x^2 & \text{se } -2 < x < 2 \\ 6 - x & \text{se } 2 \leq x < 6 \end{cases}$$

È iniettiva? **NO**



14. Determina il dominio delle funzioni aventi le seguenti equazioni:

$$f(x) = \frac{6}{x-2} \quad x \neq 2$$

$$f(x) = \frac{7}{|x| + x + 2} \quad \begin{array}{l} \text{se } x \geq 0 \quad f(x) = \frac{7}{2x+2} \quad x \neq -1 \quad \text{ma } x \geq 0 \quad \text{perci\`o: } \forall x \in \mathbb{R} \\ \text{se } x < 0 \quad f(x) = \frac{7}{-x+x+2} = \frac{7}{2} \quad \text{perci\`o: } \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{3x+2}{16x^2-4} \quad 16x^2-4 \neq 0 \quad (4x-2)(4x+2) \neq 0 \quad x \neq \pm \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{5x+2}{x^3+8} \quad x^3+8 \neq 0 \quad (x+2)(x^2-2x+4) \neq 0 \quad x \neq -2$$

$$f(x) = \frac{1}{x^3-4x^2-4x+16} \quad x^2(x-4)-4(x-4) \neq 0 \quad (x-4)(x-2)(x+2) \neq 0 \quad x \neq 4 \wedge x \neq \pm 2$$

15. Data la funzione $f(x) = bx^2 + ax + a$, si sa che è $f(1) = 7$ e $f(-1) = 3$. Quanto devono valere a e b ?

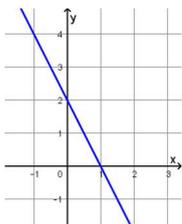
Calcolo $f(1)$ e lo pongo uguale a 7, $f(-1)$ e lo pongo uguale a 3. In questo modo, determino il valore dei parametri:

$$\begin{cases} f(1) = b + a + a = 7 \\ f(-1) = b - a + a = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3 + 2a = 7 \\ b = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

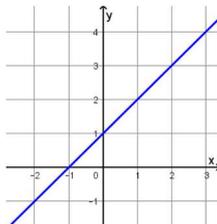
16. Considera le seguenti tabelle, stabilisci il tipo di proporzionalità che sussiste tra x e y e scrivi l'equazione della funzione di tale proporzionalità.

							Proporzionalità	Equazione
x	-8	-4	-2	0	4	8	Diretta	$y = \frac{1}{8}x$
y	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	1		
x	-4	-2	0	2	4	6	Quadratica diretta	$y = -\frac{1}{2}x^2$
y	-8	-2	0	-2	-8	-18		

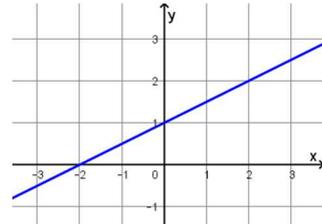
17. Scrivi l'equazione associata a ogni grafico:



$$y = -2x + 2$$



$$y = x + 1$$



$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

18. La grandezza y è inversamente proporzionale al quadrato della grandezza x e, per $x = 2$ si ha $y = 4$. Quindi, se $x = 8$, y è uguale a:

Se la grandezza y è inversamente proporzionale al quadrato della grandezza x , allora il prodotto tra la grandezza y e il quadrato della grandezza x è costante:

$$yx^2 = 4 \cdot 2^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{16}{x^2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{16}{8^2} = \frac{1}{4}$$