50. Determina k in modo che la retta $(k-1)x+y+k-2=0$:
   a) risulti parallela all'asse y;
   b) risulti parallela all'asse x;
   c) passi per l'origine degli assi;
   d) passi per A (1; 2);
   e) non passi per B (-2; 3);
   f) passi per C (-1; 3);
   g) passi per E (-1; 1).

a) Perché la retta risulti parallela all'asse y, deve avere il coefficiente di y nullo. In questo caso non è possibile.

b) Perché la retta risulti parallela all'asse x, deve avere il coefficiente di x nullo, cioè: $k=1$

c) Per ottenere la retta passante per l'origine degli assi, sostituisco a x e y le coordinate dell'origine:

$$(k-1)\cdot 0+0+k-2=0 \qquad \Rightarrow \qquad k=2$$

d) Per ottenere la retta passante per A (1; 2), sostituisco a x e y le coordinate di A:

$$(k-1)\cdot 1+2+k-2=0 \qquad \Rightarrow \qquad k-1+k=0 \qquad \Rightarrow \qquad k=\frac{1}{2}$$

e) Per ottenere una retta che non passi per B (-2; 3), sostituisco a x e y le coordinate di B. Il valore di k che ottengo sarà quello per cui ottengo una retta passante per B: tutti i valori di k diversi da questo mi danno rette non passanti per B:

$$(k-1)\cdot(-2)+3+k-2=0 \qquad \Rightarrow \qquad -2k+2+3+k-2=0 \qquad \Rightarrow \qquad k\neq 3$$

f) Per ottenere la retta passante per C (-1; 3), sostituisco a x e y le coordinate di C:

$$(k-1)\cdot(-1)+3+k-2=0 \qquad \Rightarrow \qquad -k+1+3+k-2=0 \qquad \Rightarrow \qquad imp.$$

g) Per ottenere la retta passante per E (-1; 1), sostituisco a x e y le coordinate di E:

$$(k-1)\cdot(-1)+1+k-2=0 \qquad \Rightarrow \qquad -k+1+1+k-2=0 \qquad \Rightarrow \qquad \forall k\in R$$

51. Dato il fascio di equazione $(a-2)\,x+(1-2a)\,y+1=0$, determina per quale valore di a essa è:
   a) parallela alla retta $2x-y-1=0$;
   b) perpendicolare alla retta $3x-y+1=0$;
   c) parallela alla bisettrice del 1° e 3° quadrante;
   d) parallela alla retta $x-2y+1=0$;
   e) passante per l'origine degli assi cartesiani;
   f) una retta che forma un angolo acuto con il semiasse positivo dell'asse x.

Innanzi tutto metto l'equazione del fascio in forma esplicita: $y=\dfrac{2-a}{1-2a}x-\dfrac{1}{1-2a}$.

a) Perché sia parallela alla retta $2x-y-1=0$, il coefficiente angolare deve essere uguale a 2:

$$\frac{2-a}{1-2a}=2 \qquad \Rightarrow \qquad 2-a=2-4a \qquad \Rightarrow \qquad a=0$$

Per questo valore di a, la retta del fascio coincide con la retta data.

b) Perché sia perpendicolare alla retta $3x - y + 1 = 0$, il cui coefficiente angolare è uguale a 3, dovrà avere coefficiente angolare $-\frac{1}{3}$:

$$\frac{2-a}{1-2a} = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad 6 - 3a = -1 + 2a \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{7}{5}}$$

c) Perché la retta sia parallela alla bisettrice del 1° e 3° quadrante, deve avere i coefficienti di x e y opposti:

$$a - 2 = -(1 - 2a) \quad \Rightarrow \quad a - 2 = -1 + 2a \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = -1}$$

d) Perché sia parallela alla retta $x - 2y + 1 = 0$, deve avere coefficiente angolare uguale a $\frac{1}{2}$:

$$\frac{2-a}{1-2a} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 4 - 2a = 1 - 2a \quad \Rightarrow \quad \boxed{imp.}$$

e) Per ottenere la retta passante per l'origine degli assi, sostituisco a x e y le coordinate dell'origine:

$$(a-2)\cdot 0 + (1-2a)\cdot 0 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{imp.}$$

f) Perché una retta formi un angolo acuto con il semiasse positivo dell'asse x, il coefficiente angolare deve essere positivo:

$$\frac{2-a}{1-2a} > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} N > 0: \ a < 2 \\ D > 0: \ a < \frac{1}{2} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a < \frac{1}{2} \ \vee \ a > 2}$$

52. Determina il valore di a per il quale le due rette $x + ay = 5$ e $2x - 3y = 1$ non hanno intersezioni.

Perché le due rette non abbiano intersezioni devono essere parallele, cioè devono avere lo stesso coefficiente angolare. Scriviamo le due rette in forma esplicita e poniamo i due coefficienti angolari uguali:

$$y = -\frac{1}{a}x + \frac{5}{a} \qquad y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \qquad -\frac{1}{a} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = -\frac{3}{2}}$$

Questo valore di a rende le due rette parallele, ma non coincidenti, come è facile verificare.

53. Determina i valori di a e b affinché le due rette $x - 3y - 5 = 0$ e $ax + by = 10$ abbiano infiniti punti comuni.

Perché due qualsiasi rette $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ abbiano infiniti punti comuni, devono coincidere, e cioè si deve verificare che $a_1 = k a_2$, $b_1 = k b_2$ e $c_1 = k c_2$. Possiamo facilmente verificare che, nelle due rette fornite dal testo, i due termini noti sono uno doppio dell'altro, perciò:

$$\boxed{a = 2 \ \wedge \ b = -6}$$

54. Nel fascio improprio di rette perpendicolari alla retta di equazione $5x - 7y + 9 = 0$, individua quella che taglia l'asse delle ascisse nel punto di ascissa 2.

La retta data ha coefficiente angolare $\frac{5}{7}$, perciò il fascio improprio di rette perpendicolari a questa ha equazione:

$$y = -\frac{7}{5}x + q$$

Per determinare quella che taglia l'asse delle ascisse nel punto di ascissa 2, impongo il passaggio per il punto (2; 0), sostituendo le coordinate del punto nell'equazione del fascio:

$$0 = -\frac{7}{5} \cdot 2 + q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{14}{5} \quad \Rightarrow \quad \boxed{7x + 5y - 14 = 0}$$

55. Scrivi l'equazione di tutte le rette perpendicolari alla retta di equazione $2x + 5y - 3 = 0$ e tra queste determina quella passante per il punto P (- 1; 1).

La retta data ha coefficiente angolare $-\frac{2}{5}$, perciò il fascio improprio di rette perpendicolari a questa ha equazione:

$$y = \frac{5}{2}x + q$$

Per determinare quella passante per il punto P, sostituisco le coordinate del punto nell'equazione del fascio:

$$1 = \frac{5}{2} \cdot (-1) + q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{5x - 2y + 7 = 0}$$

56. Scrivi l'equazione del fascio di rette passanti per A (- 4; 1).

Considero come rette generatrici quelle parallele agli assi passanti per A, cioè: $x + 4 = 0$ e $y - 1 = 0$.

Il fascio ha equazione: $\boxed{a(x+4) + b(y-1) = 0}$

57. Scrivi l'equazione della retta passante per l'intersezione delle rette $x - 2y + 5 = 0$ e $5x + y + 3 = 0$ e parallela alla retta $3x + y - 1 = 0$.

Determino innanzi tutto l'intersezione tra le due rette:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ y = -5x - 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} = -5x - 3 \quad \Rightarrow \quad 11x = -11 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Il coefficiente angolare della retta $3x + y - 1 = 0$ è -3, perciò impongo il passaggio per il punto determinato della retta con coefficiente angolare -3:

$$y - y_0 = -3(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 2 = -3(x + 1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{3x + y + 1 = 0}$$