25. Determina le coordinate degli eventuali punti comuni alla retta e all'iperbole di equazioni:

a. $9x^2 - 4y^2 = 36 \qquad 3x + 2y = 6$

b. $9x^2 - 25y^2 = 225 \qquad x - y - 1 = 0$

c. $3x^2 - 7y^2 - 20 = 0 \qquad x + 7y - 10 = 0$

Metto a sistema l'equazione dell'iperbole con quella della retta:

a. $\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 = 36 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3}y + 2 \\ 9\left(-\dfrac{2}{3}y + 2\right)^2 - 4y^2 = 36 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -\dfrac{2}{3}y + 2 \\ 9\left(\dfrac{4}{9}y^2 + 4 - \dfrac{4}{3}y\right) - 4y^2 = 36 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3}y + 2 \\ 4y^2 + 36 - 12y - 4y^2 = 36 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -\dfrac{2}{3}y + 2 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ la retta è tangente all'iperbole: $A\,(2;0)$

b. $\begin{cases} 9x^2 - 25y^2 = 225 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y + 1 \\ 9(y^2 + 2y + 1) - 25y^2 = 225 \end{cases}$

$\begin{cases} x = y + 1 \\ 9y^2 + 18y + 9 - 25y^2 = 225 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y + 1 \\ 8y^2 - 9y + 108 = 0 \end{cases}$

$y_{1,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{81 - 864}}{16}$ la retta è esterna all'iperbole

c. $\begin{cases} 3x^2 - 7y^2 - 20 = 0 \\ x + 7y - 10 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -7y + 10 \\ 3\,(-7y + 10)^2 - 7y^2 - 20 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -7y + 10 \\ 3\,(49y^2 - 140y + 100) - 7y^2 - 20 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -7y + 10 \\ 147y^2 - 420y + 300 - 7y^2 - 20 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -7y + 10 \\ y^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases}$ $\qquad C_1\,(3;1) \qquad C_2\,(-4;2)$

26. Determina m in modo che la retta y = mx – 1 sia tangente all'iperbole 3 x^2 – 4 y^2 – 12 = 0.

Metto a sistema le due equazioni e pongo Δ = 0 nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} y = mx - 1 \\ 3x^2 - 4y^2 - 12 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = mx - 1 \\ 3x^2 - 4(mx-1)^2 - 12 = 0 \end{cases}$$

$$3x^2 - 4(m^2x^2 - 2mx + 1) - 12 = 0 \qquad 3x^2 - 4m^2x^2 + 8mx - 4 - 12 = 0$$

$$x^2(3 - 4m^2) + 8mx - 16 = 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = 16m^2 + 16(3 - 4m^2) = 0$$

$$m^2 + 3 - 4m^2 = 0 \qquad m = \pm 1$$

27. Determina b in modo che l'iperbole $\frac{x^2}{30} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ risulti tangente alla retta di equazione x – y – 5 = 0.

$$\begin{cases} x - y - 5 = 0 \\ \frac{x^2}{30} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y + 5 \\ \frac{x^2}{30} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \qquad \frac{y^2 + 10y + 25}{30} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$b^2y^2 + 10b^2y + 25b^2 - 30y^2 = 30b^2 \qquad (b^2 - 30)\,y^2 + 10b^2y - 5b^2 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 25b^4 + 5b^2(b^2 - 30) = 0 \qquad 5b^2 + b^2 - 30 = 0$$

$$6b^2 = 30 \qquad b = \sqrt{5}$$

28. Determina l'equazione, riferita agli assi, dell'iperbole equilatera passante per il punto P (5; 4).

L'iperbole equilatera riferita agli assi è del tipo: $x^2 - y^2 = \pm a^2$. Sostituisco le coordinate del punto nella generica equazione, per determinare a:

$$25 - 16 = 9 \qquad x^2 - y^2 = 9$$

29. Determina l'equazione, riferita ai suoi asintoti, dell'iperbole equilatera passante per il punto P (–2; 4).

L'iperbole equilatera riferita agli assi è del tipo: x y = k. Sostituisco le coordinate del punto nella generica equazione, per determinare k:

$$-2 \cdot 4 = -8 \qquad xy = -8$$

30. Data l'iperbole xy = 6 e la retta x + y + k = 0, determina k in modo che la retta sia tangente alla curva.

Metto a sistema le due equazioni e pongo Δ = 0 nella risolvente, per determinare il valore di k:

$$\begin{cases} xy = 6 \\ x + y + k = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y(-y-k) = 6 \\ x = -y-k \end{cases} \qquad y^2 + ky + 6 = 0$$

$$\Delta = k^2 - 24 = 0 \qquad \boxed{k = \pm 2\sqrt{6}}$$

31. Determina l'equazione dell'iperbole di equazione $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ sapendo che passa per i punti A (0; –2), B (1; ½) e C (–1; – ¾)

Divido sia numeratore che denominatore per c: $y = \dfrac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}}$

Sostituisco nell'equazione le coordinate dei tre punti, in questo modo determino: $\dfrac{a}{c}, \dfrac{b}{c}, \dfrac{d}{c}$:

$$\begin{cases} -2 = \dfrac{\frac{b}{c}}{\frac{d}{c}} = \dfrac{b}{d} \\[2ex] \dfrac{1}{2} = \dfrac{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}}{1 + \frac{d}{c}} \\[2ex] -\dfrac{3}{4} = \dfrac{-\frac{a}{c} + \frac{b}{c}}{-1 + \frac{d}{c}} \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -2d \\ \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{d}{c}\right) = \dfrac{a}{c} - \dfrac{2d}{c} \\[2ex] -\dfrac{3}{4}\left(-1 + \dfrac{d}{c}\right) = -\dfrac{a}{c} - \dfrac{2d}{c} \end{cases}$$

sommo seconda e terza equazione:

$$\frac{1}{2} + \frac{d}{2c} + \frac{3}{4} - \frac{3d}{4c} = -\frac{4d}{c} \qquad \frac{15d}{4c} = -\frac{5}{4} \qquad \frac{d}{c} = -\frac{1}{3}$$

Sostituisco il valore così ottenuto nella seconda equazione:

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{a}{c} + \frac{2}{3} \qquad \frac{a}{c} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \qquad \frac{a}{c} = -\frac{1}{3}$$

Dalla prima equazione ottengo: $\dfrac{b}{c} = -2\dfrac{d}{c} = \dfrac{2}{3}$

L'equazione dell'iperbole diventa: $y = \dfrac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{x - \frac{1}{3}}$ ovvero: $\boxed{y = \dfrac{2-x}{3x-1}}$