23. Scrivi l'equazione dell'ellisse passante per i punti P (4, 2) e $Q\ (2;\ \sqrt{13})$ e rappresentala.

Sostituisco le coordinate di P e Q nell'equazione generica dell'ellisse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ e metto a sistema le due condizioni:

$$\begin{cases} \frac{16}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \\ \frac{4}{a^2}+\frac{13}{b^2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\left(-\frac{13}{b^2}+1\right)+\frac{4}{b^2}=1 \\ \frac{4}{a^2}=-\frac{13}{b^2}+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{52}{b^2}+4+\frac{4}{b^2}=1 \\ \frac{4}{a^2}=-\frac{13}{b^2}+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{48}{b^2}=-3 \\ \frac{4}{a^2}=-\frac{13}{b^2}+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2=16 \\ \frac{4}{a^2}=-\frac{13}{16}+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=\frac{64}{3} \\ b^2=16 \end{cases}$$

Quindi l'equazione dell'ellisse è:

$$\boxed{\frac{3x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1}$$

24. Scrivi l'equazione della retta tangente all'ellisse di equazione $5x^2+3y^2=47$ nel suo punto P (2, 3)

Dato che dal testo si arguisce che il punto appartiene all'ellisse, si può applicare la regola dello sdoppiamento per determinare l'equazione della tangente:

$$5x\cdot 2+3y\cdot 3=47 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{10x+9y-47=0}$$

25. Scrivi l'equazione della retta tangente all'ellisse di equazione $x^2+2y^2=18$ nel suo punto $A\ (2;\ \sqrt{7})$.

Dato che dal testo si arguisce che il punto appartiene all'ellisse, si può applicare la regola dello sdoppiamento per determinare l'equazione della tangente:

$$x\cdot 2+2y\cdot\sqrt{7}=18 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{x+\sqrt{7}\ y-9=0}$$

26. Trova le intersezioni della retta $2x - y + 4 = 0$ con l'ellisse avente *a* = 1 ed i fuochi $F\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2};\,0\right)$.

Bisogna innanzi tutto determinare l'equazione dell'ellisse:

$$a = 1 \quad e \quad c = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ovvero l'ellisse ha equazione: $x^2 + 2y^2 = 1$. Metto a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + 4 \\ x^2 + 2(2x+4)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + 4 \\ x^2 + 8x^2 + 32x + 32 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ 9x^2 + 32x + 31 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 279}}{9} \quad \Rightarrow \quad \Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{retta esterna}$$

27. Trova le coordinate degli eventuali punti di intersezione della retta di equazione $2x + 3y - 6 = 0$ con l'ellisse di equazione $4x^2 + 27y^2 = 27$.

Metto a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} 4x^2 + 27y^2 = 27 \\ 2x + 3y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 6 - 3y \\ (6 - 3y)^2 + 27y^2 = 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 6 - 3y \\ 9(2 - y)^2 + 27y^2 = 27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 6 - 3y \\ (2 - y)^2 + 3y^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 6 - 3y \\ 4 - 4y + y^2 + 3y^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 6 - 3y \\ 4y^2 - 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 6 - 3y \\ (2y - 1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 6 - \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{9}{4};\,\frac{1}{2}\right)$$

28. Determina l'equazione della tangente condotta all'ellisse $3x^2 + y^2 = 3$ nel punto P (2, 0).

Verifico innanzi tutto se il punto appartiene all'ellisse, sostituendo le sue coordinate nell'equazione dell'ellisse:

$$3 \cdot 2^2 + 0^2 \neq 3 \quad \Rightarrow \quad P \notin \text{ ellisse.}$$

Perciò determino l'equazione del fascio di rette centrato in P, la metto a sistema con l'equazione dell'ellisse e pongo Δ = 0 nella risolvente:

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 3 \\ y = m(x - 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = m(x - 2) \\ 3x^2 + (mx - 2m)^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = m(x - 2) \\ 3x^2 + m^2x^2 - 4m^2x + 4m^2 = 3 \end{cases}$$

Procedo con la seconda equazione, la risolvente: $(3+m^2)\,x^2 - 4m^2\,x + 4m^2 - 3 = 0$

$$\frac{\Delta}{4} = 4m^4 - (4m^2-3)\,(3+m^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4m^4 - 12m^2 - 4m^4 + 9 + 3m^2 = 0$$

$$-9m^2 + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad y \pm x \mp 2 = 0$$

29. Determina l'equazione della tangente condotta all'ellisse $16x^2 + 25y^2 = 400$ nel punto P (5, 0).

Essendo P un punto dell'ellisse, ma in particolare il vertice appartenente al semiasse positivo delle x, la tangente all'ellisse sarà la retta perpendicolare all'asse x e passante per P, ovvero: $x = 5$.

30. Determina il valore di *m* dell'equazione $x + y + m = 0$, in modo che le rette corrispondenti risultino tangenti all'ellisse $9x^2 + 16y^2 = 144$ e fanne la verifica grafica.

Metto a sistema le due equazioni e pongo Δ = 0 nella risolvente:

$$\begin{cases} x + y + m = 0 \\ 9x^2 + 16y^2 = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y - m \\ 9(-y-m)^2 + 16y^2 = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y - m \\ 9y^2 + 18ym + 9m^2 + 16y^2 = 144 \end{cases}$$

Procedo con la seconda equazione, ovvero la risolvente del sistema:

$$25y^2 + 18ym + 9m^2 - 144 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta}{4} = 81\,m^2 - 25\,(9m^2 - 144) = 0$$

$$9\,m^2 - 25\,(m^2 - 16) = 0 \quad \Rightarrow \quad 9\,m^2 - 25\,m^2 + 400 = 0 \quad \Rightarrow \quad -16\,m^2 + 400 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$m = \pm 5$$