

1. Determina l'ordinata del punto A di ascissa  $-3$  appartenente alla retta passante per l'origine e di coefficiente angolare  $\frac{2}{5}$ .

La retta passante per l'origine e di coefficiente angolare  $\frac{2}{5}$  ha equazione:  $y = \frac{2}{5}x$ .

Siccome il punto A appartiene a tale retta, sostituisco il valore dell'ascissa,  $-3$ , nell'equazione della retta e determino così

l'ordinata: 
$$y = \frac{2}{5} \cdot (-3) = -\frac{6}{5}$$

2. Sia data la retta di equazione  $2y - x - 6 = 0$ . Sia A il punto della retta di ascissa  $-1$  e B quello di ordinata  $4$ . Calcola la misura del segmento  $\overline{AB}$ .

Determino innanzi tutto le coordinate di A e di B, sostituendo la coordinata nota nell'equazione della retta cui appartengono:

$$2y - (-1) - 6 = 0 \Rightarrow 2y - 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{2} \Rightarrow A\left(-1; \frac{5}{2}\right)$$

$$2 \cdot 4 - x - 6 = 0 \Rightarrow -x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow B(2; 4)$$

Ora posso determinare la lunghezza del segmento  $\overline{AB}$ :

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-1 - 2)^2 + \left(\frac{5}{2} - 4\right)^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

3. Di un parallelogrammo ABCD si conoscono i vertici consecutivi A (1; 1), B (5; 2) e C (3; 4). Determina il quarto vertice D.

Il parallelogrammo ha i lati opposti congruenti e paralleli. Determino il coefficiente della retta passante per i punti A e B e impongo il passaggio per il punto C: in questo modo ho l'equazione della retta CD. Determino poi il coefficiente della retta passante per i punti B e C e impongo il passaggio per il punto A: in questo modo ho l'equazione della retta AD.

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - 1}{5 - 1} = \frac{1}{4} \qquad m_{\overline{CB}} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{2 - 4}{5 - 3} = -1$$

$$y - y_C = m_{\overline{AB}}(x - x_C) \Rightarrow y - 4 = \frac{1}{4}(x - 3) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$$

$$y - y_A = m_{\overline{CB}}(x - x_A) \Rightarrow y - 1 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 2$$

Metto a sistema le equazioni delle due rette e determino le coordinate del punto D.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x + \frac{13}{4} \\ y = -x + 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4}x + \frac{13}{4} = -x + 2 \Rightarrow x + 4x = 8 - 13 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Oppure più semplicemente: so che le due diagonali  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$  hanno il punto medio in comune.

Calcolo il punto medio di  $\overline{AC}$   $M \left( 2; \frac{5}{2} \right)$ .

Siccome coincide con il punto medio della diagonale  $\overline{BD}$ , conoscendo le coordinate del punto medio M e dell'estremo B, posso determinare le coordinate di D:

$$\begin{cases} \frac{x_B + x_D}{2} = x_M \\ \frac{y_B + y_D}{2} = y_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = 2x_M - x_B \\ y_D = 2y_M - y_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = 4 - 5 \\ y_D = 5 - 2 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{D(-1; 3)}$$

4. Dati i punti A (1; 3) e B (5; 1), scrivi l'equazione della retta  $r$ , asse di AB. Sia C il punto di intersezione di  $r$  con l'asse  $x$  e D quello di intersezione di  $r$  con l'asse  $y$ . Determina la misura dell'area del quadrilatero concavo ACBD.

Determino innanzi tutto l'equazione dell'asse  $r$  del segmento di estremi A e B, secondo la regola:

$$\begin{aligned} r: (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 &= (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 \\ (x - 1)^2 + (y - 3)^2 &= (x - 5)^2 + (y - 1)^2 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 &= x^2 - 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 \\ 8x - 4y - 16 &= 0 \end{aligned} \quad \mathbf{r: 2x - y - 4 = 0}$$

Determino i punti C e D mettendo a sistema, rispettivamente, l'equazione di  $r$  con quella dell'asse  $x$  e l'equazione di  $r$  con quella dell'asse  $y$ :

$$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{C(2; 0)}$$

$$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{D(0; -4)}$$

Determino l'area del quadrilatero, sottraendo dall'area del triangolo ABD l'area di ABC:

$$\begin{aligned} A_{ACBD} &= \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A - x_B & y_A - y_B \\ x_D - x_B & y_D - y_B \end{vmatrix} \right| - \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A - x_C & y_A - y_C \\ x_B - x_C & y_B - y_C \end{vmatrix} \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} \right| - \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} (20 + 10) - \left| \frac{1}{2} (-1 - 9) \right| = 15 - 5 = \mathbf{10} \end{aligned}$$

I due triangoli ABD e ABC sono entrambi isosceli, perciò posso procedere in modo diverso, determinando la lunghezza della base  $\overline{AB}$ , il punto medio M della base, la lunghezza delle due altezze  $\overline{CM}$  e  $\overline{DM}$ :

$$M \left( \frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left( \frac{5 + 1}{2}; \frac{3 + 1}{2} \right) = (3; 2)$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{CM} = \sqrt{(x_C - x_M)^2 + (y_C - y_M)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\overline{DM} = \sqrt{(x_D - x_M)^2 + (y_D - y_M)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5}$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{CM} = \frac{1}{2} 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5 \quad A_{ABD} = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{DM} = \frac{1}{2} 2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} = 15$$

$$A_{ACBD} = A_{ABD} - A_{ABC} = 15 - 5 = 10$$

5. Verifica che la parallela condotta per il punto  $(-1; 3)$  alla retta che congiunge i punti  $(5; 2)$  e  $(1; -2)$  determina con gli assi cartesiani un triangolo di area di misura 8.

Determino il coefficiente angolare della retta congiungente i punti  $(5; 2)$  e  $(1; -2)$ :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 2}{1 - 5} = 1$$

Posso determinare la retta passante per il punto  $(-1; 3)$  e con coefficiente angolare 1:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 3 = 1(x + 1) \quad \Rightarrow \quad y = x + 4$$

La retta così determinata è parallela alla bisettrice di primo e terzo quadrante e forma quindi con gli assi cartesiani due angoli di  $45^\circ$ . Il triangolo che si viene a formare è rettangolo isoscele e ha i cateti che misurano 4, visto che l'ordinata all'origine (come si evince dall'equazione della retta) è 4. L'area del triangolo vale quindi, come richiesto dal testo, 8.

Procedendo diversamente, posso determinare le coordinate dei punti di intersezione della retta con gli assi e poi, considerato che si tratta di un triangolo rettangolo in O, determino le distanze di tali punti dall'origine e ottengo l'area come semiprodotto dei due cateti:

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow A(0; 4)$$

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-4; 0)$$

$$\overline{AO} = |y_O - y_A| = 4$$

$$\overline{BO} = |x_O - x_B| = 4$$

$$A_{ABO} = \frac{1}{2} \overline{AO} \cdot \overline{BO} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8 \quad \text{c.v.d.}$$

6. Nel triangolo di vertici A  $(7; 4)$ , B  $(2; 1)$ , C  $(9; -2)$  trova la distanza del vertice A dal baricentro.

Determino innanzi tutto le coordinate del baricentro G del triangolo:

$$G \left( \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right) = \left( \frac{7 + 2 + 9}{3}; \frac{4 + 1 - 2}{3} \right) = (6; 1)$$

Determino la lunghezza del segmento  $\overline{GA}$ :

$$\overline{AG} = \sqrt{(x_A - x_G)^2 + (y_A - y_G)^2} = \sqrt{(1)^2 + (3)^2} = \sqrt{10}$$

7. Verifica che il quadrilatero avente per vertici i punti A (1; 0), B (6; 0), C (9; 4) e D (4; 4) è un rombo.

Stabilisco innanzi tutto se si tratta di un parallelogrammo, verificando che le diagonali  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$  hanno lo stesso punto medio

$$M_{\overline{AC}} \left( \frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2} \right) = \left( \frac{1 + 9}{2}; \frac{0 + 4}{2} \right) = (5; 2)$$

$$M_{\overline{BD}} \left( \frac{x_B + x_D}{2}; \frac{y_B + y_D}{2} \right) = \left( \frac{6 + 4}{2}; \frac{0 + 4}{2} \right) = (5; 2)$$

Per trattarsi di un rombo, deve avere le diagonali perpendicolari. Calcolo il coefficiente angolare delle due diagonali e verifico che sono uno l'antireciproco dell'altro:

$$m_{\overline{AC}} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{0 - 4}{1 - 9} = \frac{1}{2} \qquad m_{\overline{BD}} = \frac{y_B - y_D}{x_B - x_D} = \frac{0 - 4}{6 - 4} = -2$$

Essendo  $m_{\overline{AC}} \cdot m_{\overline{BD}} = -1$ , le due diagonali sono perpendicolari, perciò si tratta di un rombo.

8. Per il punto A (2; 3), conduci la parallela e la perpendicolare alla retta  $2x - y - 4 = 0$  e determina la misura del perimetro del triangolo da esse formato con la retta  $x = 4$ .

La retta  $2x - y - 4 = 0$  in forma esplicita diventa:  $y = 2x - 4$ , perciò ha coefficiente angolare 2. La parallela passante per A avrà anch'essa coefficiente angolare 2, mentre la perpendicolare avrà coefficiente angolare  $-\frac{1}{2}$ .

$$y - y_A = 2(x - x_A) \quad \Rightarrow \quad y - 3 = 2(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 1$$

$$y - y_A = -\frac{1}{2}(x - x_A) \quad \Rightarrow \quad y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x + 4$$

Il rettangolo che si viene a formare è rettangolo nel vertice A (visto che le due rette sono tra loro perpendicolari). Determino i punti di intersezione delle due rette con la retta  $x = 4$ :

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 4 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow B(4; 2)$$

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases} \Rightarrow C(4; 7)$$

Determino la lunghezza dei due cateti e dell'ipotenusa:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{BC} = |y_B - y_C| = 5$$

$$\text{Il perimetro è dato da: } 2p = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 3\sqrt{5} + 5$$