

1. Il triangolo ABC ha per vertici i punti $A(2; 1)$, $B\left(-4; \frac{7}{2}\right)$ e $C\left(-\frac{16}{5}; -\frac{29}{10}\right)$. Verifica che il triangolo è isoscele e determinane perimetro e area.

Determino la misura dei tre lati:

$$\overline{AB} = \sqrt{(2+4)^2 + \left(1 - \frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{36 + \frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{144 + 25} = \frac{1}{2} \sqrt{169} = \frac{13}{2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{\left(-4 + \frac{16}{5}\right)^2 + \left(\frac{7}{2} + \frac{29}{10}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{32}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \sqrt{1+8^2} = \frac{4}{5} \sqrt{65}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\left(2 + \frac{16}{5}\right)^2 + \left(1 + \frac{29}{10}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{26}{5}\right)^2 + \left(\frac{39}{10}\right)^2} = \frac{13}{5} \sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{13}{5} \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{13}{2}$$

Dalle misure determinate, si può notare che: $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, perciò il triangolo è isoscele.

Per determinare il perimetro, faccio la somma dei lati: $2p = \frac{13}{2} + \frac{4}{5} \sqrt{65} + \frac{13}{2} = 13 + \frac{4}{5} \sqrt{65}$

Trattandosi di un triangolo isoscele, per calcolare l'area determino innanzi tutto il punto medio M della base \overline{BC} e poi calcolo la distanza \overline{AM} , ovvero l'altezza (in un triangolo isoscele, l'altezza relativa alla base coincide con la mediana).

$$M\left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2}\right) = \left(\frac{-4 - \frac{16}{5}}{2}; \frac{\frac{7}{2} - \frac{29}{10}}{2}\right) = \left(-\frac{18}{5}; \frac{3}{10}\right)$$

$$\overline{AM} = \sqrt{\left(2 + \frac{18}{5}\right)^2 + \left(1 - \frac{3}{10}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{28}{5}\right)^2 + \left(\frac{7}{10}\right)^2} = \frac{7}{5} \sqrt{4^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{7}{5} \sqrt{\frac{64+1}{4}} = \frac{7}{10} \sqrt{65}$$

A questo punto, posso calcolare l'area:

$$A = \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{AM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \sqrt{65} \cdot \frac{7}{10} \sqrt{65} = \frac{7}{25} \cdot 65 = \frac{91}{5}$$

Avrei potuto calcolare l'area, visto che conoscevo le coordinate dei tre vertici, usando la matrice:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A - x_C & y_A - y_C \\ x_B - x_C & y_B - y_C \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 + \frac{16}{5} & 1 + \frac{29}{10} \\ -4 + \frac{16}{5} & \frac{7}{2} + \frac{29}{10} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{26}{5} \cdot \frac{32}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{39}{10} \right) = \frac{91}{5}$$

Volendo si può usare anche la formula di Erone, ma in tal caso bisogna avere un po' di dimestichezza con i radicali...

$$A = \sqrt{p(p - \overline{AB})(p - \overline{BC})(p - \overline{AC})} = \sqrt{\left(\frac{13}{2} + \frac{2}{5} \sqrt{65}\right) \left(\frac{2}{5} \sqrt{65}\right) \left(\frac{2}{5} \sqrt{65}\right) \left(\frac{13}{2} - \frac{2}{5} \sqrt{65}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{169}{4} - \frac{4}{25} \cdot 65\right) \frac{4}{25} \cdot 65} = \frac{2}{5} \cdot 13 \sqrt{\left(\frac{13}{4} - \frac{4}{5}\right) \cdot 5} = \frac{2}{5} \cdot 13 \sqrt{\frac{49}{20} \cdot 5} = \frac{2}{5} \cdot 13 \cdot \frac{7}{2} = \frac{91}{5}$$

2. Calcola le coordinate del punto P posto sull'asse x ed equidistante dai punti A (1; 3) e B (5; 1).

Il generico punto P, essendo posto sull'asse x, ha coordinate: $P(x; 0)$. L'unica condizione è l'equidistanza da A e B:

$$\begin{aligned} \overline{AP} &\cong \overline{BP} \Rightarrow \overline{AP}^2 \cong \overline{BP}^2 \Rightarrow (x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 = (x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2 \\ (x - 1)^2 + (0 - 3)^2 &= (x - 5)^2 + (0 - 1)^2 \\ x^2 - 2x + 1 + 9 &= x^2 - 10x + 25 + 1 \\ 8x = 16 &\Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

$$P(2; 0)$$

3. Dati i punti A (2; 4), B (9; 2) e $C\left(x; \frac{47}{4}\right)$, determina x in modo che il triangolo ABC sia isoscele sulla base \overline{AB} .

Perché il triangolo sia isoscele sulla base \overline{AB} , deve verificarsi la congruenza: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, ovvero: $\overline{AC}^2 \cong \overline{BC}^2$.

$$\begin{aligned} (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 &= (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 \\ (x - 2)^2 + \left(\frac{47}{4} - 4\right)^2 &= (x - 9)^2 + \left(\frac{47}{4} - 2\right)^2 \\ x^2 - 4x + 4 + \left(\frac{31}{4}\right)^2 &= x^2 - 18x + 81 + \left(\frac{39}{4}\right)^2 \\ 14x = 112 &\Rightarrow x = 8 \end{aligned}$$

4. Dati i punti A (-3; -1), B (0; 5) e $C(-x; 4 - x)$, determina x in modo che il triangolo ABC abbia area 9.

Per calcolare l'area del triangolo ABC, applico la seguente formula:

$$A = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A - x_C & y_A - y_C \\ x_B - x_C & y_B - y_C \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -3 + x & -1 - 4 + x \\ 0 + x & 5 - 4 + x \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2} [(x - 3)(x + 1) - x(x - 5)] \right|$$

Risolviendo l'equazione:

$$\left| \frac{1}{2} [(x - 3)(x + 1) - x(x - 5)] \right| = 9 \quad \text{determino il valore di x richiesto.}$$

$$|x^2 + x - 3x - 3 - x^2 + 5x| = 18$$

$$|3x - 3| = 18 \Rightarrow |x - 1| = 6 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 6 \\ x - 1 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 7 \\ x = -5 \end{matrix}$$

5. Dati i punti $A(2; a-1)$ e $B(a+2; 3a)$, stabilisci per quale valore del parametro a il punto medio del segmento \overline{AB} ha le coordinate uguali.

Determino le coordinate del generico punto medio M del segmento \overline{AB} :

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{2 + a + 2}{2}; \frac{a - 1 + 3a}{2}\right) = \left(\frac{a + 4}{2}; \frac{4a - 1}{2}\right)$$

Pongo le due coordinate uguali e, in questo modo, determino il valore di a :

$$\frac{a + 4}{2} = \frac{4a - 1}{2} \quad \Rightarrow \quad -3a = -5 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{5}{3}$$

6. Dopo aver determinato l'equazione dell'asse del segmento di estremi $O(0; 0)$ e $A(2; -1)$, verifica che il punto $\left(0; -\frac{5}{2}\right)$ appartiene a esso, mentre non vi appartiene il punto $(3; 3)$. Calcola l'ordinata del punto dell'asse che ha ascissa 2.

Determino innanzi tutto l'equazione dell'asse a del segmento di estremi O e A , secondo la regola:

$$a: (x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 = (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2$$

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (x - 2)^2 + (y + 1)^2$$

$$x^2 + y^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 \quad a: 4x - 2y - 5 = 0$$

Verifico l'appartenenza del punto $\left(0; -\frac{5}{2}\right)$ all'asse, sostituendo le coordinate del punto nell'equazione dell'asse:

$$4 \cdot 0 - 2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 + 5 - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(0; -\frac{5}{2}\right) \in a$$

Verifico la non appartenenza del punto $(3; 3)$ all'asse, sostituendo le coordinate del punto nell'equazione dell'asse:

$$4 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 5 = 12 - 6 - 5 = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad (3; 3) \notin a$$

Per calcolare l'ordinata del punto dell'asse di ascissa 2, sostituisco l'ascissa nell'equazione dell'asse:

$$4 \cdot 2 - 2y - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad -2y = -3 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{2}$$

7. Determina a in modo che il punto medio del segmento di estremi $A(2a - 1; 1)$ e $B\left(a; \frac{a - 2}{2}\right)$ disti $\frac{\sqrt{17}}{4}$ dall'origine.

Determino innanzi tutto le generiche coordinate del punto medio del segmento \overline{AB} :

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{2a - 1 + a}{2}; \frac{1 + \frac{a - 2}{2}}{2}\right) = \left(\frac{3a - 1}{2}; \frac{a}{4}\right)$$

Pongo la distanza di M dall'origine uguale a $\frac{\sqrt{17}}{4}$:

$$\overline{MO} = \sqrt{(x_O - x_M)^2 + (y_O - y_M)^2} = \frac{\sqrt{17}}{4} \quad \Rightarrow \quad (x_O - x_M)^2 + (y_O - y_M)^2 = \frac{17}{16}$$

$$\left(0 - \frac{3a - 1}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{a}{4}\right)^2 = \frac{17}{16} \quad \Rightarrow \quad \frac{9a^2 - 6a + 1}{4} + \frac{a^2}{16} = \frac{17}{16}$$

$$36a^2 - 24a + 4 + a^2 = 17 \quad \Rightarrow \quad 37a^2 - 24a - 13 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 481}}{37} = \frac{12 \pm 25}{37} = \left\langle \begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_2 = -\frac{13}{37} \end{array} \right.$$

8. Dati i punti $A(1; 2)$ e $D(k; k + 1)$, per quali valori di k si ottiene $\overline{AD} = \sqrt{2}$?

Pongo il segmento $\overline{AD} = \sqrt{2}$:

$$\sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad (x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2 = 2$$

$$(1 - k)^2 + (2 - k - 1)^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad (1 - k)^2 + (1 - k)^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad 2(1 - k)^2 = 2$$

$$(1 - k)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 - k = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \left\langle \begin{array}{l} k_1 = 0 \\ k_2 = 2 \end{array} \right.$$

I due valori di k così ottenuti determinano due punti D_1 e D_2 simmetrici rispetto ad A.