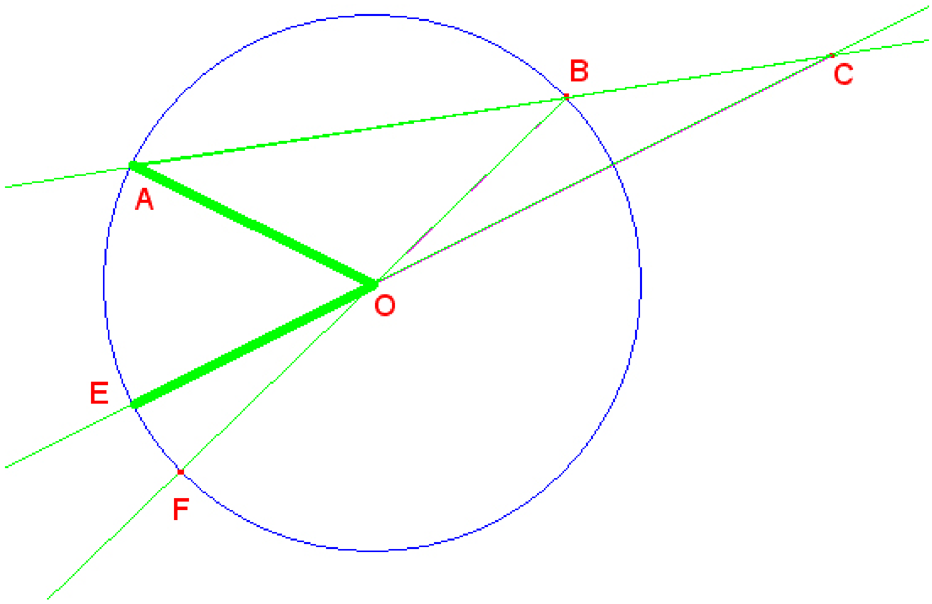
Si prolunghi una corda AB, in una circonferenza di centro O, di un segmento BC congruente al raggio; si congiunga C con O e si prolunghi tale congiungente fino ad incontrare in E la circonferenza. Dimostrare che l'angolo EOA è il triplo dell'angolo BOC.



Consideriamo il triangolo BOC. Esso è isoscele sulla base OC, in quanto i due lati OB e BC sono congruenti per ipotesi. Pertanto, gli angoli alla base sono congruenti, ovvero: $B\hat{O}C \cong O\hat{C}B$.

Per il teorema dell'angolo esterno: $O\hat{B}A \cong B\hat{O}C + O\hat{C}B$, in quanto un angolo esterno a un triangolo è congruente alla somma dei due angoli interni ad esso non adiacenti. Essendo i due angoli congruenti – come dimostrato precedentemente – si ottiene:

$$O\hat{B}A \cong 2\ B\hat{O}C.$$

Consideriamo ora l'angolo $A\hat{O}F$ (dove F si ottiene dall'intersezione della circonferenza con il prolungamento del raggio BO): esso è esterno al triangolo AOB, perciò, sempre per il teorema dell'angolo esterno, $A\hat{O}F \cong O\hat{A}B + A\hat{B}O$. Ma $O\hat{A}B \cong A\hat{B}O$, in quanto il triangolo ABO è isoscele sulla base AB (AO e OB sono due raggi della circonferenza), perciò: $A\hat{O}F \cong 2\ A\hat{B}O$ e, per quanto dimostrato prima:

$$A\hat{O}F \cong 2\ A\hat{B}O \cong 2\,(2\,B\hat{O}C) \cong 4\ B\hat{O}C.$$

Essendo E, O e C allineati per costruzione e B, O e F allineati anch'essi per costruzione, $B\hat{O}C \cong E\hat{O}F$, in quanto opposti al vertice.

Avendo ottenuto: $A\hat{O}F \cong 4\ B\hat{O}C$ e $B\hat{O}C \cong E\hat{O}F$ e sapendo che $A\hat{O}F \cong A\hat{O}E + E\hat{O}F$, sottraendo l'angolo $E\hat{O}F$ da entrambi i membri della prima uguaglianza, ottengo:

$$A\hat{O}F - E\hat{O}F \cong 4\ B\hat{O}C - E\hat{O}F \quad \Rightarrow \quad A\hat{O}E \cong 4\ B\hat{O}C - B\hat{O}C$$

$$A\hat{O}E \cong 3\ B\hat{O}C$$