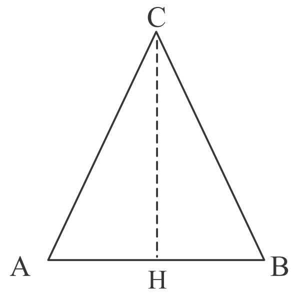
1. Poniamo AB = x e AC = BC = y, perciò le relazioni indicate dal testo diventano:



$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}\,y \\ y - x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}\,y \\ y - \frac{2}{3}\,y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}\,y \\ \frac{1}{3}\,y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}\,y \\ y = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 15 \end{cases}$$

Perciò il perimetro: $\boxed{2\,p = 10\,cm + 15\,cm + 15\,cm \; = \; 40\,cm}$

Per determinare l'area del triangolo, dobbiamo innanzi tutto conoscerne l'altezza, che possiamo ricavare tramite il teorema di Pitagora:

$$\overline{CH}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AH}^2 = \overline{AC}^2 - \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 \Rightarrow \overline{CH} = \sqrt{15^2 - 5^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

E quindi l'area: $A = \dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{CH}}{2} = \dfrac{10\cdot 10\sqrt{2}}{2} = \boxed{50\sqrt{2}}$

2. $$\frac{1}{x+2} + \frac{2x+5}{x^2-4} \le \frac{2x}{2-x} \Rightarrow \frac{1}{x+2} + \frac{2x+5}{(x+2)(x-2)} + \frac{2x}{x-2} \le 0$$

$$\frac{x - 2 + 2x + 5 + 2x^2 + 4x}{(x+2)(x-2)} \le 0 \Rightarrow \frac{2x^2 + 7x + 5}{(x+2)(x-2)} \le 0$$

$$N \ge 0:\; 2x^2 + 7x + 3 \ge 0 \qquad x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{4} \Rightarrow x \le -3 \lor x \ge -\frac{1}{2}$$

$$D_1 > 0:\; x > -2$$

$$D_2 > 0:\; x > 2$$

Effettuando lo studio dei segni: $\boxed{-3 \le x < -2 \lor -\frac{1}{2} \le x < 2}$

3. $$2\sqrt{3}\,(\sqrt{6} - 1) - 3\sqrt{2}\,(\sqrt{3} - \sqrt{6} + \sqrt{2}) + \sqrt{6}\,(3 + \sqrt{6}) - (\sqrt{18} + \sqrt{12}) =$$
$$= 6\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 3\sqrt{6} + 6\sqrt{3} - 6 + 3\sqrt{6} + 6 - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} = \boxed{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}$$

4. $x^2 + 5k\,x + 4 = 0$
   a. Perché le radici siano coincidenti, devo porre: $\Delta = 0$

   $$\Delta = 25\,k^2 - 16 = 0 \Rightarrow \boxed{k = \pm\frac{4}{5}}$$

   b. $$x_1 + x_2 + 3\,x_1 x_2 = 17 \Rightarrow -\frac{b}{a} + 3\,\frac{c}{a} = 17 \Rightarrow -b + 3c = 17\,a$$

   $$-5k + 12 = 17 \Rightarrow -5k = 5 \Rightarrow \boxed{k = -1}$$

5. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = 13 \\ xy = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 25 \\ xy = 6 \end{cases}$

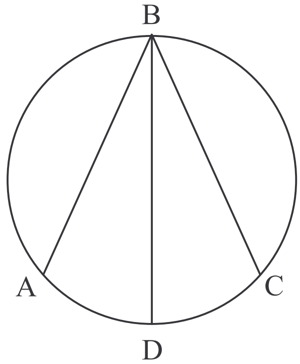
Questo corrisponde alla soluzione di due sistemi:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \Rightarrow z^2 - 5z + 6 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} x + y = -5 \\ xy = 6 \end{cases} \Rightarrow z^2 + 5z + 6 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}}$$

6. Hp: $A\hat{B}D \cong D\hat{B}C$ $\quad \overline{BD}$ diametro

Ts: $\overline{AB} \cong \overline{BC}$



Consideriamo i triangoli ABD e DBC: essi sono rettangoli, in quanto inscritti in una semicirconferenza e con un lato coincidente con il diametro e hanno un lato in comune (BD) e un angolo acuto congruente per ipotesi, quindi sono congruenti. Perciò $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, in quanto elementi corrispondenti in triangoli congruenti.

7. PRIMO TEOREMA DI EUCLIDE – In ogni triangolo rettangolo il quadrato di un cateto è equivalente al rettangolo dell'ipotenusa e della proiezione del cateto sull'ipotenusa.
SECONDO TEOREMA DI EUCLIDE – In ogni triangolo rettangolo il quadrato dell'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

Oppure:

PRIMO TEOREMA DI EUCLIDE – In un triangolo rettangolo ogni cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa.
SECONDO TEOREMA DI EUCLIDE – In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale fra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.