B

1. Classifica gli eventuali punti di discontinuità delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{6x - x^2 - 5}$$

Determino il dominio della funzione: $-x^2 + 6x - 5 \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq \frac{3 \pm \sqrt{9-5}}{1}$

$$D_f =]-\infty; 1[\cup]1; 5[\cup]5; +\infty[$$

Studio la discontinuità del punto x = 1:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 7x + 10}{6x - x^2 - 5} = -\infty$$

$x = 1$: *discontinuità di* $2^\wedge$ *specie*

$$\lim_{x \to 5^\pm} \frac{x^2 - 7x + 10}{6x - x^2 - 5} = \lim_{x \to 5^\pm} \frac{(x-2)(x-5)}{(x-5)(1-x)} = \lim_{x \to 5^\pm} \frac{x-2}{1-x} = -\frac{3}{4}$$

$x = 5$: *discontinuità di* $3^\wedge$ *specie*

$$f(x) = 2^{\frac{x-1}{3-x}}$$

Determino il dominio della funzione: $3 - x \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq 3 \qquad D_f =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$

Studio la discontinuità del punto x = 3:

$$\lim_{x \to 3^-} 2^{\frac{x-1}{3-x}} = +\infty$$

$x = 3$: *discontinuità di* $2^\wedge$ *specie*

$$f(x) = \frac{|4 - x^2|}{2 - x}$$

Determino il dominio della funzione: $2 - x \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq 2 \qquad D_f =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

Studio la discontinuità del punto x = 2:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{|4 - x^2|}{2 - x} = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x-2)(2+x)}{2-x} = 4$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{|4 - x^2|}{2 - x} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(2-x)(2+x)}{2-x} = -4$$

$x = 2$: *discontinuità di* $1^\wedge$ *specie*

$$f(x)=\begin{cases}\frac{4}{x}-2 & se\ x\geq 1\\ \frac{2x+2}{x^2+1} & se\ x<1\end{cases}$$

Determino il dominio dei singoli pezzi: $x \neq 0$ per il primo pezzo, escluso dall'intervallo in cui prendo la funzione.

$\forall\ x \in R$ per il secondo pezzo.

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{4}{x}-2\right)=2$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x+2}{x^2+1}=2$$

La funzione è continua in ogni punto dell'asse reale

2. Dopo aver enunciato il teorema di Weierstrass, controlla se le seguenti funzioni lo verificano nell'intervallo I a fianco indicato

Ogni funzione continua in un intervallo chiuso e limitato [a; b] è dotata di massimo e di minimo.

$$f(x)=\frac{x^2-5x}{x^2-4} \qquad I=[-1;1]$$

Determino il dominio della funzione: $x^2-4\neq 0 \quad\Rightarrow\quad D_f=]-\infty;-2[\,\cup\,]-2;2[\,\cup\,]2;+\infty[$

La funzione è continua nell'intervallo indicato, perciò è dotata di massimo e minimo

$$f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}} & -1\leq x<0\\ sen\,x & 0\leq x\leq 1\end{cases} \qquad I=[-1;1]$$

Verifico la continuità della funzione nel punto x = 0:

$$\lim_{x\to 0^+} sen\,x=0 \qquad \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$$

La funzione è continua nell'intervallo indicato, perciò è dotata di massimo e minimo

3. La funzione *f (x)* è definita nell'intervallo [*a; b*] e assume valori dello stesso segno agli estremi dell'intervallo. Si può concludere che la funzione non si annulla in alcun punto di [*a; b*]? Perché?

Nulla si può dire della funzione all'interno dell'intervallo [a; b], quindi non si può nemmeno essere certi che non si annulli in alcun punto dell'intervallo. Potrebbe annullarsi anche più di una volta, o potrebbe avere un punto di tangenza con l'asse x.

4. Dopo aver enunciato il teorema di esistenza degli zeri, controlla se le seguenti funzioni lo verificano nell'intervallo I a fianco indicato:

Se una funzione continua in un intervallo I assume in due punti x_1 e x_2 di I valori di segno opposto, esiste almeno un punto interno all'intervallo $]x_1; x_2[$ in cui la funzione vale zero.

$$f(x) = \frac{4-3x}{x^2-9} \qquad I = [-2; 2]$$

Determino il dominio della funzione: $x^2 - 9 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad D_f =]-\infty; -3[\cup]-3; 3[\cup]3; +\infty[$

La funzione è continua nell'intervallo indicato. Verifico se la funzione assume valori di segno opposto negli estremi di I:

$$f(-1) = \frac{4+6}{4-9} < 0 \qquad f(1) = \frac{4-6}{4-9} > 0$$

Dato che la funzione assume nei due estremi dell'intervallo valori di segno opposto, si può applicare il teorema di esistenza degli zeri, ovvero la funzione interseca l'asse x.

$$f(x) = \frac{5x-4}{x^2-1} \qquad I = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$$

Determino il dominio della funzione: $x^2 - 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$

La funzione è continua nell'intervallo indicato. Verifico se la funzione assume valori di segno opposto negli estremi di I:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{5}{2}-4}{\frac{1}{4}-1} > 0 \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{5}{2}-4}{\frac{1}{4}-1} > 0$$

Dato che la funzione non assume nei due estremi dell'intervallo valori di segno opposto, non si può applicare il teorema di esistenza degli zeri, ovvero non è detto che la funzione intersechi l'asse x.

5. Utilizzando il teorema di esistenza degli zeri, stabilisci se esistono soluzioni delle seguenti equazioni negli intervalli a fianco indicati: ________/2

$$\ln x + x - 3 = 0 \qquad I = [1; 3]$$

La funzione $f(x) = \ln x + x - 3$ è continua nell'intervallo indicato.

$$f(1) = \ln 1 + 1 - 3 < 0 \qquad f(3) = \ln 3 + 3 - 3 > 0$$

L'equazione ha soluzioni

$$x^3 - 3x + 1 = 0 \qquad I = [0; 1]$$

La funzione $f(x) = x^3 - 3x + 1$ è continua nell'intervallo indicato.

$$f(0) = 0 - 0 + 1 > 0 \qquad f(1) = 1 - 3 + 1 < 0$$

L'equazione ha soluzioni

6. Determina le costanti a e b in modo che:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{2x-3}+ax-b\right)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1+2ax^2-3ax-2bx+3x}{2x-3}=1$$

Numeratore e denominatore hanno lo stesso grado, perciò il coefficiente di x^2 è nullo:

$$2a+1=0 \quad\Rightarrow\quad a=-\frac{1}{2}$$

Perché il limite risulti 1, il coefficiente di x del numeratore deve valere 2:

$$1-3a-2b=2 \quad\Rightarrow\quad 1+\frac{3}{2}-2b=2 \quad\Rightarrow\quad 2b=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad b=\frac{1}{4}$$