



1. Classifica gli eventuali punti di discontinuità delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{3x - x^2 - 2}$$

$$\text{Determino il dominio della funzione: } -x^2 + 3x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2}$$

$$D_f = ]-\infty; 1[ \cup ]1; 2[ \cup ]2; +\infty[$$

Studio la discontinuità del punto  $x = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 7x + 10}{3x - x^2 - 2} = -\infty$$

$x = 1$ : discontinuità di 2<sup>a</sup> specie

$$\lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{x^2 - 7x + 10}{3x - x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{(x-2)(x-5)}{(x-2)(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{x-5}{1-x} = 3$$

$x = 2$ : discontinuità di 3<sup>a</sup> specie

$$f(x) = 2^{\frac{x-1}{2-x}}$$

$$\text{Determino il dominio della funzione: } 2 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \quad D_f = ]-\infty; 2[ \cup ]2; +\infty[$$

Studio la discontinuità del punto  $x = 2$ :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} 2^{\frac{x-1}{2-x}} = +\infty$$

$x = 2$ : discontinuità di 2<sup>a</sup> specie

$$f(x) = \frac{|4 - x^2|}{2 + x}$$

$$\text{Determino il dominio della funzione: } 2 + x \neq 0 \Rightarrow x \neq -2 \quad D_f = ]-\infty; -2[ \cup ]-2; +\infty[$$

Studio la discontinuità del punto  $x = -2$ :

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|4 - x^2|}{2 + x} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x-2)(2+x)}{2+x} = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|4 - x^2|}{2 + x} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(2-x)(2+x)}{2+x} = 4$$

$x = -2$ : discontinuità di 1<sup>a</sup> specie

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} - 2 & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{x+1}{x^2+1} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Determino il dominio dei singoli pezzi:  $x \neq 0$  per il primo pezzo, escluso dall'intervallo in cui prendo la funzione.

$\forall x \in \mathbb{R}$  per il secondo pezzo.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{3}{x} - 2 \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x^2+1} = 1$$

La funzione è continua in ogni punto dell'asse reale

2. Dopo aver enunciato il teorema di Weierstrass, controlla se le seguenti funzioni lo verificano nell'intervallo I a fianco indicato

Ogni funzione continua in un intervallo chiuso e limitato  $[a; b]$  è dotata di massimo e di minimo.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4} \qquad I = [-1; 1]$$

Determino il dominio della funzione:  $x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow D_f = ]-\infty; -2[ \cup ]-2; 2[ \cup ]2; +\infty[$

La funzione è continua nell'intervallo indicato, perciò è dotata di massimo e minimo

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x \leq 1 \\ e^{\frac{1}{x}} & -1 \leq x < 0 \end{cases} \qquad I = [-1; 1]$$

Verifico la continuità della funzione nel punto  $x = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

La funzione è continua nell'intervallo indicato, perciò è dotata di massimo e minimo

3. La funzione  $f(x)$  è definita nell'intervallo  $[a; b]$  e assume valori dello stesso segno agli estremi dell'intervallo. Si può concludere che la funzione non si annulla in alcun punto di  $[a; b]$ ? Perché?

Nulla si può dire della funzione all'interno dell'intervallo  $[a; b]$ , quindi non si può nemmeno essere certi che non si annulli in alcun punto dell'intervallo. Potrebbe annullarsi anche più di una volta, o potrebbe avere un punto di tangenza con l'asse  $x$ .

4. Dopo aver enunciato il teorema di esistenza degli zeri, controlla se le seguenti funzioni lo verificano nell'intervallo I a fianco indicato:

Se una funzione continua in un intervallo I assume in due punti  $x_1$  e  $x_2$  di I valori di segno opposto, esiste almeno un punto interno all'intervallo  $]x_1; x_2[$  in cui la funzione vale zero.

$$f(x) = \frac{4 - 3x}{x^2 - 4} \qquad I = [-1; 1]$$

Determino il dominio della funzione:  $x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow D_f = ]-\infty; -2[ \cup ]-2; 2[ \cup ]2; +\infty[$

La funzione è continua nell'intervallo indicato. Verifico se la funzione assume valori di segno opposto negli estremi di I:

$$f(-1) = \frac{4 + 3}{1 - 4} < 0 \qquad f(1) = \frac{4 - 3}{1 - 4} < 0$$

Dato che la funzione non assume nei due estremi dell'intervallo valori di segno opposto, non si può applicare il teorema di esistenza degli zeri, ovvero non è detto che la funzione intersechi l'asse x.

$$f(x) = \frac{5x - 2}{x^2 - 1} \qquad I = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$$

Determino il dominio della funzione:  $x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow D_f = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 1[ \cup ]1; +\infty[$

La funzione è continua nell'intervallo indicato. Verifico se la funzione assume valori di segno opposto negli estremi di I:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{5}{2} - 2}{\frac{1}{4} - 1} > 0 \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{5}{2} - 2}{\frac{1}{4} - 1} < 0$$

Dato che la funzione assume nei due estremi dell'intervallo valori di segno opposto, si può applicare il teorema di esistenza degli zeri, ovvero la funzione interseca l'asse x.

5. Utilizzando il teorema di esistenza degli zeri, stabilisci se esistono soluzioni delle seguenti equazioni negli intervalli a fianco indicati: \_\_\_\_\_/2

$$\ln x + x - 2 = 0 \qquad I = [1; 2]$$

La funzione  $f(x) = \ln x + x - 2$  è continua nell'intervallo indicato.

$$f(1) = \ln 1 + 1 - 2 < 0 \qquad f(2) = \ln 2 + 2 - 2 > 0$$

L'equazione ha soluzioni

$$x^3 - 3x + 1 = 0 \qquad I = [1; 2]$$

La funzione  $f(x) = x^3 - 3x + 1$  è continua nell'intervallo indicato.

$$f(1) = 1 - 3 + 1 < 0 \qquad f(2) = 8 - 6 + 1 > 0$$

L'equazione ha soluzioni

6. Determina le costanti  $a$  e  $b$  in modo che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + x + 1}{2x - 3} + ax - b \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1 + 2ax^2 - 3ax - 2bx + 3x}{2x - 3} = 1$$

Numeratore e denominatore hanno lo stesso grado, perciò il coefficiente di  $x^2$  è nullo:

$$2a + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{2}$$

Perché il limite risulti 1, il coefficiente di  $x$  del numeratore deve valere 2:

$$1 - 3a - 2b = 2 \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{3}{2} - 2b = 2 \quad \Rightarrow \quad 2b = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{4}$$