1. Studia la seguente funzione e rappresenta i risultati in un grafico: ________/6

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 3x - 4}$$

Dominio: $x^2 - 3x - 4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 4[\cup]4; +\infty[$

Come si evince dal dominio, la funzione non ha simmetrie né rispetto all'asse y (pari) né rispetto all'origine (dispari).

Intersezioni con gli assi: $O\,(0;0) \quad A\,(-4;\,0)$

Positività della funzione: $\dfrac{x^2 + 4x}{x^2 - 3x - 4} > 0$

N > 0: $x < -4 \;\vee\; x > 0$

D > 0: $x < -1 \;\vee\; x > 4$ $\qquad]-\infty; -4[\cup]-1; 0[\cup]4; +\infty[$

Limiti ai confini del campo di esistenza: asintoti

$$\lim_{x \to -1^{\pm}} \frac{x^2 + 4x}{(x+1)(x-4)} = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad x = -1 \text{ asintoto verticale}$$

$$\lim_{x \to 4^{\pm}} \frac{x^2 + 4x}{(x+1)(x-4)} = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad x = 4 \text{ asintoto verticale}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 3x - 4} = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \text{ asintoto orizzontale}$$

2. Calcola i seguenti limiti:

i. $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - x + 5}{4x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2}{4x^2} = \frac{3}{4}$ ________/1

ii. $\displaystyle \lim_{x \to 1^-} e^{\frac{3+x}{1-x}} = +\infty$ ________/1

iii. $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} (x + \sqrt{3 - x}) = \lim_{x \to -\infty} x \left(1 + \sqrt{\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x}} \right) = -\infty$ ________/1

iv. $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \frac{1 + \sqrt{x}}{x + 1} = 1$ ________/1

v. $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{2}$ ________/1

vi. $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{3x}{5x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x}{5x^2} = 0$ ________/1

vii. $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{2 - \sqrt{3x - 5}} = \frac{2 - \sqrt{6 - 2}}{2 - \sqrt{6 - 5}} = 0$ ________/1

viii. $$\lim_{x\to -3}\left(\frac{1}{x+3}+\frac{5}{x^2+x-6}\right)=\lim_{x\to -3}\frac{x-2+5}{(x+3)\,(x-2)}=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{5}$$ ________/1

ix. $$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-4x}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)\,(x+4)}{x\,(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{x+4}{x}=2$$ ________/1

x. $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+5x-4}{x^4-2x^2+5x-4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\,(x^2-x+4)}{(x-1)\,(x^3+x^2-x+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x+4}{x^3+x^2-x+4}=\frac{4}{5}$$ ________/1

3. Determina gli asintoti della seguente funzione:

$$y=\frac{x^2-4x}{2x+3}$$ ________/1

$$D_f=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[\cup\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$$

$$\lim_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^{\pm}}\frac{x^2-4x}{2x+3}=\pm\infty \quad\Rightarrow\quad x=-\frac{3}{2}$$ asintoto verticale

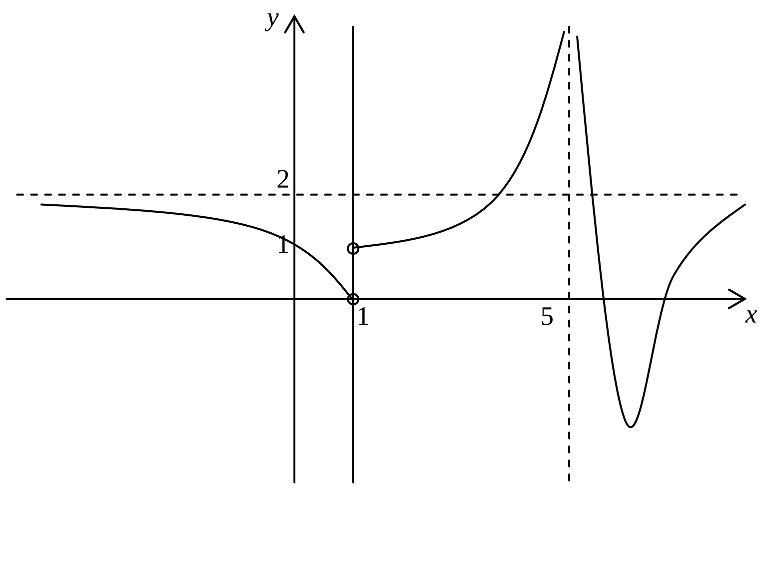
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-4x}{2x+3}=\pm\infty \quad\Rightarrow$$ può esistere asintoto obliquo

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-4x}{2x^2+3x}=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad q=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-4x}{2x+3}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-11x}{2\,(2x+3)}=-\frac{11}{4}$$

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{11}{4}$$ asintoto obliquo

4. Esamina il grafico della seguente funzione e descrivine il comportamento agli estremi del dominio, dopo averne specificato il dominio: ________/1

$$D_f=\left]-\infty;1\right[\cup\left]1;5\right[\cup\left]5;+\infty\right[$$



$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=2$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=0$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=1$$

$$\lim_{x\to 5^\pm}f(x)=+\infty$$