1. Determina l'equazione dell'ellisse avente l'asse maggiore sull'asse *x*, la distanza focale uguale a 8 e passante per il punto $P\left(\frac{5}{3};\ 2\sqrt{2}\right)$.
Determina inoltre le equazioni delle tangenti all'ellisse uscenti dal punto Q (0; 5) e dal punto P.

Siccome la distanza focale è 8: $c = 4$ ed essendo $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Impongo il passaggio dell'ellisse per il punto P: $\frac{25}{9a^2} + \frac{8}{b^2} = 1$.

Metto a sistema le due condizioni: $\begin{cases} a^2 - b^2 = 16 \\ 25b^2 + 72a^2 = 9a^2b^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + 16 \\ 25b^2 + 72(b^2 + 16) = 9b^2(b^2 + 16) \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 = b^2 + 16 \\ 25b^2 + 72b^2 + 1152 = 9b^4 + 144b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + 16 \\ 9b^4 + 47b^2 - 1152 = 0 \end{cases} \qquad b^2_{1,2} = \frac{-47 \pm 209}{18} = \left\langle \begin{array}{l} 9 \\ -\frac{128}{9} \quad non\ \ acc. \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 9 \end{cases} \qquad \boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1}$$

Per determinare le equazioni delle tangenti uscenti dal punto Q, considero l'equazione della generica retta passante per Q $y = mx + 5$ e la metto a sistema con l'equazione dell'ellisse, imponendo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} y = mx + 5 \\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = mx + 5 \\ \frac{x^2}{25} + \frac{m^2x^2 + 25 + 10mx}{9} = 1 \end{cases} \Rightarrow 9x^2 + 25m^2x^2 + 625 + 250mx = 225$$

$$(9 + 25m^2)x^2 + 250mx + 400 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta}{4} = 125^2m^2 - 400(9 + 25m^2) = 0$$

$$625m^2 - 16(9 + 25m^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 625m^2 - 144 - 400m^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 225m^2 - 144 = 0$$

$$25m^2 - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_{1,2} = \pm\frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \pm\frac{4}{5}x + 5}$$

Essendo P un punto dell'ellisse, determino l'equazione della tangente all'ellisse con la regola dello sdoppiamento:

$$\frac{x \cdot \frac{5}{3}}{25} + \frac{y \cdot 2\sqrt{2}}{9} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{3x + 10y\sqrt{2} = 45}$$

2. $4^{\frac{3+x}{x-1}} = 2^{5x}$

$2^{2\cdot\frac{3+x}{x-1}} = 2^{5x} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{6+2x}{x-1} = 5x \quad \Rightarrow \quad 6+2x = 5x^2 - 5x \qquad c.a.:\ x \neq 1$

$5x^2 - 7x - 6 = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{49+120}}{10} = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ -\dfrac{3}{5} \end{array} \right. \qquad \boxed{x = 2;\ \ x = -\dfrac{3}{5}}$

3. $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 \leq 0$

Pongo: $3^x = t \quad \Rightarrow \quad 3t^2 - 10t + 3 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{3} \leq t \leq 3$

$\dfrac{1}{3} \leq 3^x \leq 3 \quad \Rightarrow \quad 3^{-1} \leq 3^x \leq 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{-1 \leq x \leq 1}$

4. $3\log_2(x+2) - 3\log_2(2x-1) + \log_2 4 - \log_3 9 = 0$

$c.a.: \begin{cases} x+2>0 \\ 2x-1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x>\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad x > \dfrac{1}{2}$

$3\log_2(x+2) = 3\log_2(2x-1) - 2 + 2$

$\log_2(x+2) = \log_2(2x-1) \quad \Rightarrow \quad x+2 = 2x-1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 3}$

5. $\ln(7-x)+\ln(12-x)>2\ln(x+3)$

$\ln(7-x)(12-x)>\ln(x+3)^2$

$$\begin{cases} 7-x>0 \\ 12-x>0 \\ x+3>0 \\ 84-19x+x^2>x^2+6x+9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<7 \\ x<12 \\ x>-3 \\ x<3 \end{cases} \Rightarrow \quad -3<x<3$$

6. $\cos 4\pi + 2\,sen\left(-\dfrac{15}{2}\pi\right)+\dfrac{1}{3}\cos(-3\pi)+sen\,\dfrac{9}{2}\pi$

$$=1+2\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot(-1)+1=1+2-\frac{1}{3}+1=4-\frac{1}{3}=\frac{11}{3}$$

7. $\left[\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,tg\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-\dfrac{3}{4}\,ctg\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\pi\right]\left[3+sen\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

$$=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3}-\frac{3}{4}-1\right)(3+1)=\frac{1}{4}\cdot 4=1$$

8. $(1+tg^2\,\alpha)(1-sen^2\,\alpha)=1$

$$\left(1+\frac{sen^2\,\alpha}{\cos^2\,\alpha}\right)(\cos^2\,\alpha)=1 \qquad \frac{\cos^2\,\alpha+sen^2\,\alpha}{\cos^2\,\alpha}\cdot\cos^2\,\alpha=1$$

$$\cos^2\,\alpha+sen^2\,\alpha=1 \qquad 1=1$$

9. $(tg\ \alpha + ctg\ \alpha)\ sen\ \alpha = \dfrac{1}{\cos\ \alpha}$

$\dfrac{sen\ \alpha}{\cos\ \alpha} \cdot sen\ \alpha + \dfrac{\cos\ \alpha}{sen\ \alpha} \cdot sen\ \alpha = \dfrac{1}{\cos\ \alpha}$

$\dfrac{sen^2\ \alpha}{\cos\ \alpha} + \cos\ \alpha = \dfrac{1}{\cos\ \alpha}$

$\dfrac{sen^2\ \alpha + \cos^2\ \alpha}{\cos\ \alpha} = \dfrac{1}{\cos\ \alpha}$

$\dfrac{1}{\cos\ \alpha} = \dfrac{1}{\cos\ \alpha}$

10. $\dfrac{sen\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(-\alpha) + sen\,(2\pi - \alpha) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) + sen\,(-\alpha)}$

$= \dfrac{\cos\ \alpha + \cos\ \alpha - sen\ \alpha + sen\ \alpha}{-\ sen\ \alpha - sen\ \alpha} = \dfrac{\cos\ \alpha + \cos\ \alpha}{-2\ sen\ \alpha} = \dfrac{2\ \cos\ \alpha}{-2\ sen\ \alpha} = -\ ctg\ \alpha$