1. Determina l'equazione dell'ellisse con asse focale sull'asse *y*, di vertici $(0;\ \pm 5)$ ed eccentricità $\frac{3}{5}$ e rappresentala.

La generica equazione dell'ellisse è: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con *a* > *b*, avendo l'asse focale sull'asse y. Perciò:

$$\begin{cases} b = 5 \\ \frac{c}{b} = \frac{3}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 5 \\ c = 3 \end{cases} \qquad \text{ma } c = \sqrt{b^2 - a^2}$$

$$b^2 - a^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = b^2 - c^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 25 - 9 = 16 \qquad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

2. Data l'ellisse di equazione $x^2 + 25y^2 = 25$, determina le equazioni delle tangenti nei suoi punti di ascissa 4.

Determino innanzi tutto le coordinate dei punti dell'ellisse di ascissa 4, sostituendo l'ascissa 4 nell'equazione dell'ellisse:

$$4^2 + 25y^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad 25y^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\frac{3}{5}$$

Dato che i punti si trovano sull'ellisse, posso determinare l'equazione delle tangenti mediante la regola dello sdoppiamento:

$$4x \pm \frac{3}{5}\,25\ y = 25 \qquad 4x \pm 15\ y = 25$$

3. Data l'ellisse $x^2 + 9y^2 = 1$, determina le equazioni delle rette tangenti parallele alla retta $x + 3y = 1$.

Il coefficiente angolare della retta data è $-\frac{1}{3}$, perciò metto a sistema la generica retta di coefficiente $-\frac{1}{3}$ con l'equazione dell'ellisse e pongo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente.

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + q \\ x^2 + 9y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + q \\ x^2 + 9\left(-\frac{1}{3}x + q\right)^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 + 9\left(\frac{1}{9}x^2 + q^2 - \frac{2}{3}xq\right) = 1 \qquad x^2 + x^2 + 9q^2 - 6xq = 1$$

$$2x^2 - 6xq + 9q^2 - 1 = 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = 9q^2 - 2(9q^2 - 1) = 0$$

$$9q^2 - 18q^2 + 2 = 0 \qquad q = \pm\frac{\sqrt{2}}{3} \qquad x + 3y \pm \sqrt{2} = 0$$

4. Trova l'equazione dell'iperbole avente i fuochi $F_1(\sqrt{29};\ 0)$ e $F_2(-\sqrt{29};\ 0)$ e per asintoti le rette $y = \pm\frac{2}{5}x$ e rappresentala.

$$\begin{cases} c = \sqrt{29} \\ \frac{b}{a} = \frac{2}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} c^2 = 29 \\ b = \frac{2}{5}a \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 + b^2 = 29 \\ b^2 = \frac{4}{25}a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + \frac{4}{25}a^2 = 29 \\ b^2 = \frac{4}{25}a^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{29}{25}a^2 = 29 \\ b^2 = \frac{4}{25}a^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 4 \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1}$$

5. Determina l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli assi passante per il punto P (-1; 2).

   La generica equazione dell'iperbole equilatera riferita agli assi è: $x^2 - y^2 = \pm a^2$. Sostituisco le coordinate di P alla generica equazione: $1 - 4 = -a^2$ $\quad \boxed{y^2 - x^2 = 3}$

6. Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera traslata sapendo che ha un asintoto di equazione *y* = 1, passa per l'origine e per il punto P (1; -1).

   L'iperbole equilatera traslata ha generica equazione: $y = \frac{ax + b}{cx + d}$. Dividendo numeratore e denominatore per c, trovo:

   $y = \frac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}}$. L'asintoto verticale $y = 1$ ha generica equazione: $y = \frac{a}{c}$.

   Metto questa condizione a sistema con il passaggio per i punti dati:

$$\begin{cases} \frac{a}{c} = 1 \\ 0 = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{d}{c}} = \frac{b}{d} \\ -1 = \frac{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}}{1 + \frac{d}{c}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{a}{c} = 1 \\ b = 0 \\ -1 = \frac{1}{1 + \frac{d}{c}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{a}{c} = 1 \\ b = 0 \\ \frac{d}{c} = -2 \end{cases}$$

$$\boxed{y = \frac{x}{x - 2}}$$