1. Determina l'equazione dell'ellisse di eccentricità $\frac{\sqrt{7}}{4}$, passante per $P\left(2\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right)$ e avente per asse focale l'asse *x*.

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4} \\ \frac{12}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4} \\ \frac{12}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{7}{16} \\ \frac{12}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16a^2 - 16b^2 = 7a^2 \\ \frac{12}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 9a^2 - 16b^2 = 0 \\ \frac{12}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 = \frac{9}{16}a^2 \\ \frac{12}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2 = \frac{9}{16}a^2 \\ \frac{12}{a^2} + \frac{9}{4\frac{9}{16}a^2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 = \frac{9}{16}a^2 \\ \frac{12}{a^2} + \frac{4}{a^2} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 9 \end{cases} \qquad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

2. Data l'ellisse $x^2 + 4y^2 = 4$, scrivi le equazioni delle tangenti:
   a. uscenti dal punto P (3; 0)
   b. uscenti dal punto $T\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

a. Verifico se il punto P appartiene all'ellisse, sostituendo le coordinate del punto all'ellisse: $3^2 + 0 \neq 4$. Perciò considero la generica retta passante per P, metto a sistema questa equazione con quella dell'ellisse e pongo $\Delta = 0$ nella risolvente.

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ y = m(x-3) \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 4m^2(x-3)^2 = 4 \\ y = m(x-3) \end{cases} \qquad x^2 + 4m^2x^2 - 24m^2x + 36m^2 = 4$$

$$x^2(1+4m^2) - 24m^2x + 36m^2 - 4 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 144m^4 - (1+4m^2)(36m^2 - 4) = 0$$

$$36m^4 - (1+4m^2)(9m^2 - 1) = 0 \qquad 36m^4 - 9m^2 + 1 - 36m^4 + 4m^2 = 0$$

$$5m^2 = 1 \qquad m = \pm\frac{\sqrt{5}}{5} \qquad y = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}(x-3)$$

b. Verifico se il punto T appartiene all'ellisse, sostituendo le coordinate del punto all'ellisse: $1^2 + 4 \cdot ¾ = 4$. Siccome il punto appartiene all'ellisse, posso applicare la regola dello sdoppiamento:

$$x \cdot 1 + 4y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4 \qquad x + 2\sqrt{3}\,y = 4$$

3. Determina l'equazione dell'iperbole riferita ai suoi assi di simmetria, avente come asse focale l'asse x e passante per i punti $(-3;\,-2)$ e $(\sqrt{6};\,\sqrt{2})$.

La generica equazione dell'iperbole è: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, avendo come asse focale l'asse x.

Sostituisco le coordinate dei punti nella generica equazione e metto a sistema:

$$\begin{cases}\dfrac{9}{a^2}-\dfrac{4}{b^2}=1\\[2mm]\dfrac{6}{a^2}-\dfrac{2}{b^2}=1\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{9}{a^2}-\dfrac{12}{a^2}+2=1\\[2mm]\dfrac{2}{b^2}=\dfrac{6}{a^2}-1\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{3}{a^2}=1\\[2mm]\dfrac{2}{b^2}=\dfrac{6}{a^2}-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2=3\\[2mm]\dfrac{2}{b^2}=\dfrac{6}{3}-1\end{cases}\qquad\begin{cases}a^2=3\\[2mm]\dfrac{2}{b^2}=1\end{cases}\qquad\begin{cases}a^2=3\\b^2=2\end{cases}$$

$$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$$

4. Determina le coordinate dei punti di intersezione fra l'iperbole $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}=-1$ e la retta $y=x\sqrt{6}$.

Metto a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}=-1\\[2mm]y=x\sqrt{6}\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{3x^2}{2}=-1\\[2mm]y=x\sqrt{6}\end{cases}\qquad\begin{cases}-x^2=-1\\y=x\sqrt{6}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=1\\y=\sqrt{6}\end{cases}\qquad\begin{cases}x=-1\\y=-\sqrt{6}\end{cases}\qquad P\,(1;\sqrt{6})\quad Q\,(-1;-\sqrt{6})$$

5. Determina l'equazione, riferita agli assi, dell'iperbole equilatera passante per il punto P (5; 4).

L'iperbole equilatera riferita agli assi è del tipo: $x^2 - y^2 = \pm\, a^2$. Sostituisco le coordinate del punto nella generica equazione, per determinare a:

$$25-16=9\qquad\qquad x^2-y^2=9$$

6. Data l'iperbole xy = 6 e la retta x + y + k = 0, determina k in modo che la retta sia tangente alla curva.

$$\begin{cases}xy=6\\x+y+k=0\end{cases}\qquad\begin{cases}y\,(-y-k)=6\\x=-y-k\end{cases}\qquad y^2+ky+6=0$$

$$\Delta=k^2-24=0\qquad\qquad k=\pm 2\sqrt{6}$$