1. Determina l'equazione dell'ellisse avente l'asse maggiore sull'asse *x*, la distanza focale uguale a 12 e avente eccentricità 3/5 e rappresentala.

La generica equazione dell'ellisse è: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ con *a* > *b*, avendo l'asse focale sull'asse x. Se la distanza focale è pari a 12, c = 6. Perciò:

$$\begin{cases} c=6 \\ \frac{c}{a}=\frac{3}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} c=6 \\ a=10 \end{cases} \qquad \text{ma } c=\sqrt{a^2-b^2}$$

$$a^2-b^2=c^2 \quad \Rightarrow \quad b^2=a^2-c^2 \quad \Rightarrow \quad b^2=100-36=64 \qquad \boxed{\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1}$$

2. Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$, determina q in modo che la retta $y=2x+q$ sia tangente all'ellisse.

Metto a sistema le due equazioni e pongo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} 2x^2+y^2=4 \\ y=2x+q \end{cases} \qquad 2x^2+4x^2+4xq+q^2=4$$

$$6x^2+4xq+q^2-4=0 \qquad \frac{\Delta}{4}=4q^2-6q^2+24=0$$

$$q^2=12 \quad \Rightarrow \quad q=\pm 2\sqrt{3} \qquad \boxed{y=2x\pm 2\sqrt{3}}$$

3. Data l'iperbole di equazione $4x^2-25y^2+100=0$, determina le equazioni delle tangenti nei suoi punti di ascissa $\frac{5}{2}$.

Innanzi tutto determino l'ordinata dei punti di ascissa 5/2, sostituendo l'ascissa 5/2 nell'equazione dell'iperbole:

$$4\cdot\frac{25}{4}-25y^2+100=0 \quad \Rightarrow \quad -25y^2+125=0 \quad \Rightarrow \quad y=\pm\sqrt{5}$$

I due punti sono: $P\left(\frac{5}{2};\sqrt{5}\right)$ e $Q\left(\frac{5}{2};-\sqrt{5}\right)$

Applicando la formula dello sdoppiamento, ottengo le due rette:

$$4x\cdot\frac{5}{2}-25(\pm\sqrt{5})y+100=0 \qquad \boxed{2x\pm 5\sqrt{5}\,y+20=0}$$

4. Determina l'equazione dell'iperbole riferita ai suoi assi di simmetria, avente fuochi in (±5; 0) e passante per il punto $(4\sqrt{2};\sqrt{3})$ e rappresentala.

La generica equazione dell'iperbole è: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, avendo i fuochi sull'asse x. Siccome i fuochi hanno coordinate (±5; 0), allora c = 5. Sostituendo le coordinate del punto nella generica equazione, ottengo l'iperbole richiesta.

$$\begin{cases} c=5 \\ \frac{32}{a^2}-\frac{3}{b^2}=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c^2=25 \\ \frac{32}{a^2}-\frac{3}{b^2}=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2+b^2=25 \\ \frac{32}{a^2}-\frac{3}{b^2}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2=25-b^2 \\ \frac{32}{25-b^2}-\frac{3}{b^2}=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2=25-b^2 \\ 32b^2-75+3b^2=25b^2-b^4 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2=25-b^2 \\ b^4+10b^2-75=0 \end{cases}$$

$$b^2=\frac{-5\pm\sqrt{25+75}}{1}=\left\langle \begin{array}{l} 5 \\ -15 \;\; non\ acc. \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad a^2=20$$

$$\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$$

5. Determina l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai suoi assi di simmetria e passante per il punto (1; 7).

La generica equazione dell'iperbole equilatera riferita agli assi è: $x^2-y^2=\pm a^2$. Sostituisco le coordinate del punto alla generica equazione: $1-49=-a^2$

$$y^2-x^2=48$$

6. Determina l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti, passante per il punto (3; 4).

L'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti ha generica equazione $xy=k$. Sostituendo le coordinate del punto ottengo:

$$xy=12$$

7. Determina a, c e d nell'equazione dell'iperbole $y=\frac{ax}{cx+d}$, sapendo che ha asintoti *x* = 3 e *y* = 2.

Le equazioni generiche degli asintoti sono: $x=-\frac{d}{c}$ e $y=\frac{a}{c}$ e dividendo sia numeratore che denominatore per c nell'equazione dell'iperbole data dal testo: $y=\frac{\frac{a}{c}x}{x+\frac{d}{c}}$, perciò:

$$y=\frac{2x}{x-3}$$