1. Scrivi l'equazione della circonferenza che ha per diametro il segmento AB con A (2; 0) e B (4; 1) e rappresentala.

Essendo AB il diametro, il centro della circonferenza è il punto medio del segmento AB. Lo possiamo determinare:

$$C \equiv M_{\overline{AB}}\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{2+4}{2}; \frac{0+1}{2}\right) = \left(3; \frac{1}{2}\right)$$

Determiniamo anche la misura del raggio della circonferenza, come metà del diametro AB:

$$r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}{2} = \frac{\sqrt{(4-2)^2 + (1-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Per la definizione di circonferenza come luogo geometrico, posso determinarne l'equazione:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - y + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 6x - y + 8 = 0$$

Avendo le coordinate del centro e le coordinate di un punto appartenente alla circonferenza, è facile rappresentarla, basta puntare il compasso nel centro C con apertura CA (o CB indifferentemente).

2. Scrivi l'equazione della circonferenza passante per A (–2; –2) e B (4; 2) e avente il centro C sulla retta 3 x – y – 12 = 0.

Determino le coordinate del centro C. Innanzi tutto calcolo l'equazione dell'asse del segmento AB e poi lo interseco con la retta cui appartiene il centro (questo perché l'asse di una corda di una circonferenza passa sempre per il centro della stessa):

asse del segmento AB: $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2$

$$(x+2)^2 + (y+2)^2 = (x-4)^2 + (y-2)^2$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4$$

$$12x + 8y - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x + 2y - 3 = 0$$

Per determinare C, punto di intersezione con la retta 3 x – y – 12 = 0, metto a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ 3x - y - 12 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} 3x + 2(-3) - 3 = 0 \\ y = -3 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad C\,(3; -3)$$

$$3y + 9 = 0$$

$$y = -3$$

Determino il raggio della circonferenza come lunghezza del segmento AC:

$$r = \overline{AC} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(3+2)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{26}$$

Per la definizione di circonferenza come luogo geometrico, posso determinarne l'equazione:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2 + (y+3)^2 = \sqrt{26}^2 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 = 26 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 6x + 6y - 8 = 0$$

3. Scrivi l'equazione della retta tangente alla circonferenza $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 8 = 0$ nel punto P (5; 1).

Verifico innanzi tutto se il punto P appartiene o no alla circonferenza, sostituendo le coordinate di P nell'equazione della circonferenza e verificando se ne risulta un'identità:

$$5^2 + 1^2 - 4 \cdot 5 + 2 \cdot 1 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad P \in \text{ circonferenza}$$

Determino il centro della circonferenza e lo uso per determinare il coefficiente angolare del raggio CP. La tangente alla circonferenza passante per P sarà perpendicolare al raggio CP e quindi avrà coefficiente angolare uguale all'antireciproco del coefficiente angolare di CP. In questo modo, posso facilmente determinare l'equazione della tangente:

$$C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right) = (2; -1) \quad \Rightarrow \quad m_{\overline{CP}} = \frac{y_P - y_C}{x_P - x_C} = \frac{1+1}{5-2} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad m_t = -\frac{1}{m_{\overline{CP}}} = -\frac{3}{2}$$

$$t:\ y - y_P = m_t\,(x - x_P) \quad \Rightarrow \quad y - 1 = -\frac{3}{2}(x - 5) \quad \Rightarrow \quad \boxed{3x + 2y - 17 = 0}$$

4. Scrivi l'equazione della parabola ad asse verticale che ha vertice V (0; –1) e fuoco F (0; –3) e rappresentala.

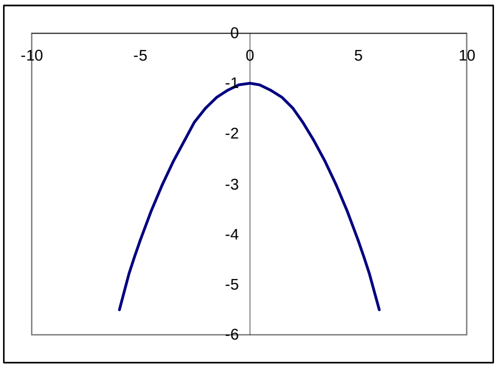
Essendo una parabola ad asse verticale ha generica equazione $y = ax^2 + bx + c$. Siccome ha vertice sull'asse y, possiamo ricavare, ponendo l'ascissa del vertice nulla uguale a quella generica e sostituendo le coordinate del vertice nella generica equazione della parabola:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 0 \\ -1 = 0a + 0b + c \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$$

Sostituisco i coefficienti ottenuti nell'equazione che ricavo ponendo l'ordinata generica del fuoco uguale a – 3:

$$\frac{-\Delta + 1}{4a} = -3 \quad \Rightarrow \quad \frac{-b^2 + 4ac + 1}{4a} = -3 \quad \Rightarrow \quad -4a + 1 = -12a \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{8}$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{8}x^2 - 1}$$



5. Scrivi le equazioni delle tangenti alla parabola x = $y^2 - 2y - 1$ condotte dal punto P (–3; 1).

Verifico innanzi tutto se il punto P appartiene o no alla parabola, sostituendo le sue coordinate nell'equazione della parabola e verificando se ne risulta un'identità:

$$-3 = 1^2 - 2\cdot 1 - 1 \quad \Rightarrow \quad -3 \neq -2 \quad \Rightarrow \quad P \notin \text{ parabola}$$

Determino quindi l'equazione della generica retta passante per P e la metto a sistema con quella della parabola, ponendo Δ = 0 nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} x = y^2 - 2y - 1 \\ y - 1 = m\,(x + 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2 - 2y - 1 \\ y = 1 + mx + 3m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2 - 2y - 1 \\ y = 1 + m\,(y^2 - 2y - 1) + 3m \end{cases}$$

$$y = 1 + my^2 - 2my - m + 3m \quad \Rightarrow \quad my^2 - y\,(2m + 1) + 2m + 1 = 0$$

$$\Delta = (2m + 1)^2 - 4m\,(2m + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad (2m + 1)\,(2m + 1 - 4m) = 0$$

$$m = \pm\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \qquad y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

6. Determina la parabola con asse parallelo all'asse y che passa per l'origine e per i punti A (–1; 3) e B (2; 0) e rappresentala.

La generica equazione della parabola con asse parallelo all'asse y e passante per l'origine è: $y = ax^2 + bx$. Impongo il passaggio della parabola per i punti A e B, sostituendo le coordinate dei punti nell'equazione generica della parabola e mettendo a sistema le due equazioni così ottenute:

$$\begin{cases} 0 = 4a + 2b \\ 3 = a - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ 3 = a + 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow \quad y = x^2 - 2x$$