1. Data la retta r: x + 2 y + 2 = 0, determina:
   a. la retta parallela a r passante per B (8; 5)
   b. la perpendicolare a r passante per B (8; 5)
   c. la perpendicolare a r passante per C (4; 7)
   d. l'area del quadrilatero individuato dalle quattro rette.

   a. La retta parallela a r ha il suo stesso coefficiente angolare. Riscrivo la retta r in forma esplicita: $y = -\frac{1}{2}x - 1$.

   La retta parallela a r, s, è: $y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 8) \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}x + 9}$

   b. La retta perpendicolare a r ha coefficiente angolare 2.
   La retta t, è: $y - 5 = 2(x - 8) \Rightarrow \boxed{y = 2x - 11}$

   c. La retta u, è: $y - 7 = 2(x - 4) \Rightarrow \boxed{y = 2x - 1}$

   d. Interseco a due a due le quattro rette, per determinare i punti di intersezione:

$$\begin{cases} y = 2x - 11 \\ y = -\frac{1}{2}x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 11 \\ 2x - 11 = -\frac{1}{2}x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 11 \\ 5x = 20 \end{cases} \Rightarrow A(4; -3)$$

$$\begin{cases} y = 2x - 11 \\ y = -\frac{1}{2}x + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 11 \\ 2x - 11 = -\frac{1}{2}x + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 11 \\ 5x = 40 \end{cases} \Rightarrow B(8; 5)$$

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 2x - 1 = -\frac{1}{2}x + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 5x = 20 \end{cases} \Rightarrow C(4; 7)$$

   Non è necessario determinare il quarto vertice, visto che si tratta di un rettangolo per come l'abbiamo costruito. Perciò determino la lunghezza dei due lati così poi ottengo l'area del rettangolo:

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-8)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{1 + 2^2} = 4\sqrt{5}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(4-8)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{2^2 + 1} = 2\sqrt{5}$$

$$A = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 4\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = \boxed{40}$$

2. Determina l'asse del segmento di estremi A (4; –3) e B (8; 5).

   Applico la formula per calcolare l'asse del segmento:

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2$$
$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = (x - 8)^2 + (y - 5)^2$$
$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 = x^2 - 16x + 64 + y^2 - 10y + 25$$
$$8x + 16y - 64 = 0 \qquad \boxed{x + 2y - 8 = 0}$$

3. Determina l'area del triangolo di vertici A (4; –3), B (6; 1) e C (0; –1).

   Utilizzando la matrice: $A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[4 - 6 - (-18 - 4)] = \frac{1}{2}(-2 + 22) = \boxed{10}$