1. Trova il punto dell'asse *y* equidistante dai punti A (4; 3) e B (3; 7).

   I punti equidistanti da A e B si trovano sull'asse del segmento AB, perciò determino l'equazione dell'asse del segmento e lo interseco con l'asse *y*. In questo modo, trovo il punto richiesto.

   Asse di $\overline{AB}$: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = (x-3)^2 + (y-7)^2$

   $$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 14y + 49$$

   $$-2x + 8y - 33 = 0 \qquad\qquad 2x - 8y + 33 = 0$$

   Determino il punto facendo il sistema tra l'equazione dell'asse del segmento e l'equazione dell'asse y:

   $$\begin{cases} 2x - 8y + 33 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8y + 33 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P\left(0; \frac{33}{8}\right)}$$

2. Le rette $y = 3x$ e $y = -x + 4$ sono i due lati consecutivi di un parallelogrammo ABCD. Determina le equazioni degli altri due lati sapendo che il vertice C opposto a quello individuato dalle rette date ha coordinate (-2; 14). Determina inoltre perimetro e area del parallelogrammo.

   Siccome i lati di un parallelogrammo sono a due a due paralleli, determino innanzi tutto il lato *r* parallelo alla retta $y = 3x$ passante per C e poi il lato parallelo *s* alla retta $y = -x + 4$ passante per C.

   r: $y - 14 = 3(x + 2) \quad \Rightarrow \quad y = 3x + 20$

   s: $y - 14 = -1(x + 2) \quad \Rightarrow \quad y = -x + 12$

   Per determinare il perimetro del parallelogrammo, mi basta determinare le misure di due lati consecutivi. Perciò determino le coordinate del punto A, dato dall'intersezione tra la retta $y = 3x$ e $y = -x + 4$ e le coordinate di B date dall'intersezione tra la retta *s* e la retta $y = 3x$:

   $$A: \begin{cases} y = 3x \\ y = -x + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} -x + 4 = 3x \\ y = -x + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

   $$B: \begin{cases} y = 3x \\ y = -x + 12 \end{cases} \quad \begin{cases} -x + 12 = 3x \\ y = -x + 12 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \end{cases}$$

   Determino la lunghezza del lato AB e quella del lato BC:

   $$\overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (9-3)^2} = \sqrt{4 + 36} = 2\sqrt{10}$$

   $$\overline{BC} = \sqrt{(3+2)^2 + (9-14)^2} = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}$$

   $$2p = 2 \cdot 2\sqrt{10} + 2 \cdot 5\sqrt{2} = \boxed{2\sqrt{2}\,(2\sqrt{5} + 5)}$$

   Per determinare l'area del parallelogrammo, serve la distanza di C dalla retta $y = 3x$. Dopo aver determinato questa misura, l'altezza del parallelogrammo, moltiplico questa per la base AB:

   $$d\,(C;\, y = 3x) = \frac{|+6 + 14|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{20}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10}$$

   $$A = 2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{10} = \boxed{40}$$

3. Determina il valore di *a* in modo che il punto medio del segmento $\overline{AB}$, con $A\,(3a-1;\,4)$ e $B\,(9a-3;\,0)$, sia M (4; 2).

Determino il generico punto medio del segmento $\overline{AB}$:

$$M\left(\frac{3a-1+9a-3}{2};\,\frac{4+0}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{12a-4}{2};\,2\right) \qquad M\,(6a-2;\,2)$$

Ponendo queste coordinate uguali a quelle date, determino il valore di a:

$$6a-2=4 \quad \Rightarrow \quad a=1$$