1. Determina l'equazione della parabola con fuoco F (3; 3) che ha direttrice y = 5 e rappresentala.

Utilizzando la definizione di parabola, come luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dal fuoco e dalla direttrice, determino l'equazione della parabola:

$$(x-3)^2+(y-3)^2=(y-5)^2$$

$$x^2-6x+9+y^2-6y+9=y^2-10y+25$$

$$y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}$$

2. Determina le tangenti alla parabola $x=-y^2+2y+3$, uscenti dal punto $A\left(6;\frac{3}{2}\right)$.

Determino l'equazione della generica retta passante per il punto A: $y-\frac{3}{2}=m(x-6)$, la metto a sistema con l'equazione della parabola e pongo $\Delta = 0$ nella risolvente:

$$\begin{cases} y=mx-6m+\frac{3}{2} \\ x=-y^2+2y+3 \end{cases} \qquad y=m(-y^2+2y+3)-6m+\frac{3}{2}$$

$$2y=-2my^2+4my+6m-12m+3 \qquad 2my^2+2y(1-2m)+6m-3=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=(1-2m)^2-2m(6m-3)=0 \qquad 1-4m+4m^2-12m^2+6m=0$$

$$8m^2-2m-1=0 \qquad m_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{8} \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \qquad y=-\frac{1}{4}x+3$$

3. Dopo aver determinato l'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse y avente vertice nel punto $V\left(0;-\frac{25}{3}\right)$ e passante per il punto B (–5; 0), determina l'equazione della circonferenza con centro nell'origine e passante per il punto B. Determina infine l'area del quadrilatero individuato dalle due coniche.

$$\begin{array}{r} \textit{ascissa del vertice} \\ \textit{passaggio della parabola per il vertice} \\ \textit{passaggio della parabola per il punto B} \end{array} \begin{cases} -\frac{b}{2a}=0 \\ -\frac{25}{3}=c \\ 0=25a-5b+c \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=0 \\ c=-\frac{25}{3} \\ 25a-\frac{25}{3}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=0 \\ c=-\frac{25}{3} \\ a=\frac{1}{3} \end{cases} \qquad y=\frac{1}{3}x^2-\frac{25}{3}$$

La circonferenza con centro nell'origine, passando per il punto B ha raggio: $\overline{OB} = |0+5| = 5$, perciò ha equazione:

$$x^2 + y^2 = 25$$

Determino le ulteriori intersezioni tra la parabola e la circonferenza, notando che una è il punto B e l'altra è il simmetrico di B rispetto all'asse di simmetria della parabola, ovvero A (5; 0)
Metto a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{25}{3} \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{25}{3} \\ x^2 = -y^2 + 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}(-y^2 + 25) - \frac{25}{3} \\ x^2 = -y^2 + 25 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\frac{1}{3}y^2 + \frac{25}{3} - \frac{25}{3} \\ x^2 = -y^2 + 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 + 3y = 0 \\ x^2 = -y^2 + 25 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 25 \end{cases}$$

e determinerei A e B

$$\begin{cases} y = -3 \\ x^2 = -9 + 25 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -3 \\ x^2 = 16 \end{cases} \qquad C\,(-4; -3) \qquad D\,(4; -3)$$

Il quadrilatero è un trapezio. Determino la misura delle due basi:

$$\overline{AB} = |5+5| = 10 \qquad \overline{CD} = |4+4| = 8$$

Essendo le due basi su due rette parallele all'asse x, possiamo determinare l'altezza come la distanza tra le due rette:

$$\overline{DH} = |0+3| = 3$$

Calcolo l'area: $A = \dfrac{(\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot \overline{DH}}{2} = \dfrac{(10+8)\cdot 3}{2} = 27$