1. Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$, scrivi l'equazione della circonferenza ad essa concentrica e passante per il punto A (3; –1).

Determino innanzi tutto il centro della circonferenza data: C (1; –2). Questo sarà anche il centro della nuova circonferenza da determinare, essendo concentriche. Determino il raggio come distanza CA:

$$r = \overline{CA} = \sqrt{(3-1)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Ho elementi sufficienti per determinare l'equazione della circonferenza:

$$\mathscr{C}\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = (\sqrt{5})^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$$

2. Data la retta di equazione $s:\ y = \frac{4}{3}x + \frac{13}{6}$ e il punto C (3; 2), determina l'equazione della circonferenza con centro in C e tangente alla retta *s*.

Il raggio della circonferenza da determinare è dato dalla distanza tra il punto C e la retta s, che in forma implicita è: $8x - 6y + 13 = 0$

$$r = d\,(C;\,s) = \frac{|24 - 12 + 13|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{25}{\sqrt{100}} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

Ho elementi sufficienti per determinare l'equazione della circonferenza:

$$\mathscr{C}\ (x-3)^2 + (y-2)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + \frac{27}{4} = 0$$

3. Sono dati i punti A (4; 2) , B (10; 4) e D (3; 5). Dopo aver verificato che le rette AB e AD sono perpendicolari, determina le coordinate di C, vertice del rettangolo ABCD e la circonferenza circoscritta a questo rettangolo.

Determino i coefficienti angolari di AB e AD e verifico che sono uno l'antireciproco dell'altro:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{4-2}{10-4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$m_{\overline{AD}} = \frac{5-2}{3-4} = \frac{3}{-1} = -3$$

Quindi: $\overline{AB} \perp \overline{AD}$

Determino il vertice C, sapendo che il punto medio della diagonale AC coincide con il punto medio della diagonale BD. Il punto medio della diagonale BD è: $M_{\overline{BD}}\left(\frac{10+3}{2};\frac{4+5}{2}\right) = \left(\frac{13}{2};\frac{9}{2}\right)$

$$\frac{x_A + x_C}{2} = \frac{13}{2} \quad \Rightarrow \quad x_A + x_C = 13 \quad \Rightarrow \quad x_C = 13 - x_A = 9$$

$$\frac{y_A + y_C}{2} = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad y_A + y_C = 9 \quad \Rightarrow \quad y_C = 9 - y_A = 7$$

$$C\,(9;\,7)$$

La circonferenza circoscritta al rettangolo ha il centro coincidente con il punto d'incontro delle diagonali, $\left(\frac{13}{2};\frac{9}{2}\right)$, perciò il raggio della circonferenza è pari a metà della diagonale del rettangolo:

$$r = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{\sqrt{(9-4)^2 + (7-2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{25+25}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Ho elementi sufficienti per determinare l'equazione della circonferenza:

$$\mathscr{C}\quad \left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 - 13x - 9y + 50 = 0$$

4. Nella circonferenza $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$, determina la misura della corda che ha come punto medio A (1; 2).

La retta passante per il centro della circonferenza e per il punto medio della corda è perpendicolare alla corda stessa. Perciò se uno degli estremi della corda è P, il triangolo PAC è rettangolo e vale il teorema di Pitagora:

$$\overline{PA} = \sqrt{\overline{CP}^2 - \overline{CA}^2}$$

CP è l'ipotenusa ed è pari al raggio: $\overline{CP}^2 = 10$.

CA lo posso determinare, considerando il centro della circonferenza $C\,(2;\,4)$ come indicato nell'equazione data:

$$\overline{CA}^2 = (2-1)^2 + (4-2)^2 = 1 + 4 = 5$$

Perciò:

$\overline{PA} = \sqrt{\overline{CP}^2 - \overline{CA}^2} = \sqrt{10-5} = \sqrt{5}$. Ma siccome A è il punto medio della corda, la corda ha misura $2\sqrt{5}$.